Algebra Lineal
Rectas y planos en el espacio

En los problemas 1 al 10 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada.

1. Contiene a $(2, 1, 3)$ y $(1, 2, -1)$
2. Contiene a $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$
3. Contiene a $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$
4. Contiene a $(-4, 1, 3)$ y $(2, 0, -4)$
5. Contiene a $(2, 3, -4)$ y $(3, 2, 1)$
6. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$
7. Contiene a $(7, 1, 3)$ y $(-1, -2, 3)$
8. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(-1, 2, -2)$
9. Contiene a $(2, 2, 1)$ y es paralela a $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
10. Contiene a $(-1, -6, 2)$ y es paralela a $4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

Sea L_1 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

y sea L_2 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

11. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

Sean L_1 y L_2 dos rectas, v_1 vector director de L_1 y v_2 vector director de L_2.

a) L_1 es paralela a L_2 si v_1 es paralelo a v_2.
b) L_1 es perpendicular (ortogonal) a L_2 si $v_1 \cdot v_2 = 0$ y $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

12. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

De los problemas 26 al 30 encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado.

26. $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{-5}; \frac{x-3}{7}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{3}; (1,-3,2)$

27. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{-3}; \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{6}; (0,0,0)$

28. $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z+1}{3}; \frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z+3}{-2}; (-4,7,3)$

29. $x=3-2t,\ y=4+3t,\ z=-7+5t;\ x=-2+4s,\ y=3-2s,\ z=3+s; (-2,3,4$

30. $x=4+10t,\ y=-4-8t,\ z=3+7t;\ x=-2t,\ y=1+4t,\ z=-7-3t; (4,6,0)$

31. Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-4}{-4}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+2}{1}$$

[*Sugerencia:* La distancia se mide a lo largo del vector **v** que es perpendicular a L_1 y a L_2. Sea P un punto en L_1 y Q un punto en L_2. Entonces la longitud de la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre **v** es la distancia entre las rectas, medida a lo largo del vector que es perpendicular a ambas.]

32. Encuentre la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{1}$$

De los problemas 33 al 44 encuentre la ecuación del plano.

33. $P=(0,0,0)$; $\mathbf{n}=\mathbf{i}$

34. $P=(0,0,0)$; $\mathbf{n}=\mathbf{j}$

35. $P=(0,0,0)$; $\mathbf{n}=\mathbf{k}$

36. $P=(1,2,3)$; $\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

37. $P=(1,2,3)$; $\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$

38. $P=(-1,2,3)$; $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

39. $P=(1,2,3)$; $\mathbf{n}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$

40. $P=(2,-1,6)$; $\mathbf{n}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

41. $P=(-4,-7,50)$; $\mathbf{n}=-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$

42. $P=(-3,11,2)$; $\mathbf{n}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

43. $P=(0,-1,-2)$; $\mathbf{n}=4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

44. $P=(3,-2,5)$; $\mathbf{n}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-8\mathbf{k}$

Dos planos son **ortogonales** si sus vectores normales son ortogonales. De los problemas 51 al 57 determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) o ninguno de los anteriores.

51. π_1: $x+y+z=2$; π_2: $2x+2y+2z=4$

52. π_1: $x+2y+3z=1$; π_2: $2x+4y+6z=2$

53. π_1: $x-y+z=3$; π_2: $-3x+3y-3z=-9$

54. π_1: $2x-y+z=3$; π_2: $x+y-z=7$

55. π_1: $2x-y+z=3$; π_2: $x+y+z=3$

56. π_1: $3x-2y+7z=4$; π_2: $-2x+4y+2z=16$

57. π_1: $3x-2y+5z=0$; π_2: $x+4y-6z=0$