# Algebra lineal
# Matrices

Una matriz $A$ un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en $m$ renglones (filas) y $n$ columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*Fila 1*

*Columna 1*

La componente o elemento $ij$ de $A$, denotado por $a_{ij}$, es el número que aparece en la fila $i$ y la columna $j$ de $A$=($a_{ij}$).

**NOTACIÓN:** Las matrices se denotarán con letras mayúsculas A, B, C,…etc.

**Nota:** Los vectores son matrices de un renglón o una columna.

A= $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ es una matriz 2x2

B= $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 7 & 55 & 2 \\ 10 & 6 & 65 \end{bmatrix}$ es una matriz 3x3

$C = \begin{bmatrix} 22 & 3 \\ 4 & 5 \\ 54 & 12 \end{bmatrix}$ es una matriz 3x2

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz cero de 2x4

**Ej1:** Encuentre la componente (1,2) y (2,1) de cada una de las cuatro matrices anteriores.

## Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si:

1) Son del mismo tamaño.
2) Las componentes correspondientes son iguales.

**Ej2:** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 8-4 & 6-5 & 10-5 \\ 1+1 & 6-9 & 11-11 \\ 0+1 & 3-3 & 6+3 \end{bmatrix}$

## Suma de matrices

Sean $A$=($a_{ij}$) y $B$=($b_{ij}$) dos matrices $m \times n$, la suma de $A$ y $B$ es la matriz $m \times n$, $A$+$B$, dada por:

$$A+B=a_{ij} + b_{ij}$$

La matriz $A$+$B$ de tamaño $m \times n$ se obtiene al sumar las componentes correspondientes de $A$ y $B$.

**Nota:** La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Ej3:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

## Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y si $k$ es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, $kA$, está dada por:

$$kA=(ka_{ij})$$

$$k\cdot A = k\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} & \cdots & k\cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k.a_{m2} & k\cdot a_{m3} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Ej4:**

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$.

$-\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ y $0A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Propiedades de la suma y producto por escalar de matrices:** Sean $A$, $B$ y $C$ tres matrices $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

1) *A+0 =A*
2) *0A=0*
3) *A+B=B+A*
4) *(A+B)+C=A+(B+C)*
5) *α(A+B)=αA+αB*
6) *1A=A*

## Producto de matrices

Dos matrices $A$ y $B$ se dicen multiplicables si el número de columnas de $A$ coincide con el número de filas de $B$.

$$A \times B = P$$

$$A_{m\times n} \times B_{n\times q} = P_{m\times q}$$

El elemento $p_{ij}$ de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila $i$ de la matriz $A$ por cada elemento de la columna $j$ de la matriz $B$ y sumándolos.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1q} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mq} \end{pmatrix}$$

**Ej5:** Para un caso de matrices 4x4:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

**Ej6:** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y B= $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

**3**x**2** **2**x**2**

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(1)+(-2)(2) & (1)(-1)+(-2)(7) \\ (2)(1)+(4)(2) & (2)(-1)+(4)(7) \\ (3)(1)+(5)(2) & (3)(-1)+(5)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{bmatrix}$$

**Propiedades del producto de matrices**

Sean $A$, $B$ Y $C$ matrices. Siempre que sea posible efectuar los productos indicados, de acuerdo con la condición anterior, se verifica:

1. (AB)C = A(BC )
2. A(B + C ) = AB + AC
3. AB $\neq$ BA

**Ejr:** Consultar al respecto del producto de matrices por bloques.

## Tipos especiales de matrices

- **Matriz fila:** Está constituida por una sola fila.

  **Ej7:** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

- **Matriz columna:** Está constituida por una sola columna.

  **Ej8:** $\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- **Matriz rectangular:** Tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión *mxn*.

  **Ej9:** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 7 & 7 \\ 9 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz cuadrada:** Tiene el mismo número de filas que de columnas. La *Diagonal principal* de una matriz cuadrada es la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha, esto es, todos los elementos de la forma $a_{ii}$.

  **Ej10:** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz nula:** Todos los elementos son ceros.

  **Ej11:** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **Matriz triangular superior:** todos los elementos ubicados por debajo de la diagonal principal son ceros.

  **Ej12:** $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

- **Matriz triangular inferior:** Todos los elementos sobre la diagonal principal son ceros.

  **Ej13:** $\begin{bmatrix} 92 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

- **Matriz diagonal:** Todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son ceros.

  **Ej14:** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz escalar:** Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son iguales.

  **Ej15:** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- **Matriz identidad (I):** Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

  **Ej16:** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz traspuesta:** Dada una matriz A, se denomina Matriz Traspuesta de A ($A^t$) a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.

  **Ej17:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- **Matriz simétrica:** Es una matriz que verifica: $A=A^t$.

  **Ej18:** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz antisimétrica:** Es una matriz que verifica: $A=-A^t$.

  **Ej19:** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

- **Matriz ortogonal:** Es una matriz que verifica: $AA^t=I$.

  **Ej20:**

  $$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz idempotente:** Es una matriz que verifica: $A^2=A$.

  **Ej21:** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriz involutiva:** Es una matriz que verifica: $A^2=I$.

  **Ej22:** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- **Matriz nilpotente:** Es una matriz que verifica: $A^k=0$. Para algún $k \in \mathbb{N}$. (*k:* Índice de nilpotencia).

  **Ej23:** $\begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ La matriz Ej23 es nilpontente de orden 2, es decir $k$=2.

## Inversa de una matriz

Sean $A$ y $B$ dos matrices de *nxn*. Suponga que $AB = BA = I$, entonces $B$ se llama la inversa de $A$ y se denota por $A^{-1}$, esto es:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si $A$ tiene inversa, entonces se dice que $A$ es invertible.

**Ej24:**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}$$

ya que

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina *singular* y una matriz invertible se llama *no singular*.

***Observación 1.*** A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$, si $A$ es invertible.

***Observación 2.*** No toda matriz cuadrada tiene inversa.

***Observación 3.*** La inversa de una matriz es única.

## Matrices Elementales

### Operaciones Elementales

Sea $A$ una matriz de $mxn$, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en $A$ multiplicando $A$ por la izquierda por una matriz adecuada. Las operaciones elementales son:

i. Multiplicar la fila $i$ por un número $c$ distinto de cero. $f_i \to cf_i$.
ii. Sumar un múltiplo del renglón $i$ al renglón $j$. $f_j \to f_j + cf_i$.
iii. Intercambiar los renglones $i$ y $j$. $f_i \leftrightarrow f_j$.

***Definición:*** Una matriz cuadrada $E$ de $nxn$ se denomina una *matriz elemental* si se puede obtener a partir de la matriz identidad $I_n$, de $nxn$ mediante una sola operación elemental con filas.

**Ej25:** Obtener tres matrices elementales *3x3* a partir de $I_3$.

i. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; f_3 \to 8f_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

ii. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; f_2 \to f_2 - 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; f_2 \leftrightarrow f_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Teorema:** Toda matriz elemental es invertible, es decir es posible retornar a la matriz inicial haciendo otra operación elemental. En general

| **Operación Elemental** | **Operación inversa correspondiente** |
|---|---|
| $f_i \to cf_i$ | $f_i \to \left(\frac{1}{c}\right) f_i$ |
| $f_j \to f_j + cf_i$ | $f_j \to f_j - cf_i$ |
| $f_i \leftrightarrow f_j$ | $f_j \leftrightarrow f_i$ |

**Ej26:** Cálculo de la inversa de una matriz haciendo uso de la matriz *I* con operaciones elementales.

Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Sol:// Se pone la matriz *A* seguida de *I* (*A* así representada se denomina como *matriz aumentada*).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f2 \dashrightarrow f2+f1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f1 \dashrightarrow f1-3f2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f1 \dashrightarrow -f1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

De ahí que

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$