Algebra Lineal
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Taller

1. Resuelva el sistema $AX = O$, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Resuelva el sistema $AX = B$.

   En los ejercicios 3 a 7 resuelva el sistema de ecuaciones dado.

3. $$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 5x + 5y - z &= 31 \\ 2x + 3y + z &= 23 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= -2 \\ 2x - 2y + 5z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= -10 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= -abc \\ 3bcx + 2acy - abz &= 4abc \end{aligned}$$
   Con a, b y c reales dados y $abc \neq 0$.

6. $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 21 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -14 \end{aligned}$$

8. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - y + 2z &= 11 \\ -x + 2y + z &= -1 \\ 3x - y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

9. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

En los problemas del 1al 10 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen. Todas las soluciones para los sistemas dados.

1. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. Analice el sistema para los posibles valores de *q*.

2x + 3y +z + 2w = 3

4x+ 6y+3z+4w= 5

6x+9y+5z+6w=7

8x+12y+7z+qw=9

12. Discutir las soluciones del siguiente sistema según los valores de a:

ax+ y + z =1

x + ay + z=1

x + y + az=1

13. La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 3 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

(a) Si (8, 12, 4, p) es solución del sistema, determine el valor de *a* y el valor de *p*.
(b) Determine el conjunto solución del sistema usando el valor de a encontrado antes.

14. La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 3 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Determine para qué valor o valores de *a* el sistema tiene infinitas soluciones o tiene solución única o no tiene solución.

15. La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right).$$

Determine para qué valor o valores de *a* y *b* el sistema tiene infinitas soluciones con un parámetro o infinitas soluciones con dos parámetros o tiene solución única o no tiene solución.

16. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 - bx_3 &= -1 \\ bx_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 &= b+1 \end{aligned}$$

Determine para qué valor o valores de b el sistema tiene infinitas soluciones o tiene solución única o no tiene solución. Determine el conjunto solución en cada caso.

17. Resuelva el sistema dado:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Regla de Cramer

En los problemas 1 al 8, use la Regla de Cramer para resolver los sistemas dados.

1. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -7x_1 + 4x_2 &= 47 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 11 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + \qquad x_3 &= 2 \\ -x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 7 \\ 2x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\ 4x_1 + x_2 \qquad\qquad &= -3 \\ 3x_3 - 5x_4 &= 2 \end{aligned}$

10. Determine los cofactores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 11 al 18 use el determinante para calcular la inversa, si existe.

11. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

19. En cada caso determine la matriz adjunta.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

20. Use la adjunta para encontrar la inversa de cada matriz en el ejercicio anterior.

21. Utilice determinantes para comprobar, en cada caso, si la matriz dada es invertible, o no.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

22. Determine la matriz adjunta y la inversa de cada matriz:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 2 \\ x & 3 & x \end{pmatrix}$

23. Pruebe que para cualquier valor de *p* la matriz siguiente es invertible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -1 \\ -p & 1 & p \\ 2 & 2p & -1 \end{pmatrix}$$