

Álgebra Lineal

Espacios Vectoriales

1. En \mathbb{R}^2 se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{y} \quad \alpha \star (x, y) = (\alpha x, y)$$

¿Es un espacio vectorial?

- 2.1. Determina si cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 es subespacio vectorial:

$$\begin{array}{ll} (a) S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}; & (b) S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0\} \\ (c) S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = -z\}; & (d) S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ó } y = z\} \\ (e) S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2x = 0, z = 5x\}; & (f) S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\} \\ (g) S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1\}; & (h) S_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}. \end{array}$$

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos, de \mathbb{R}^3 o $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, son subespacios vectoriales?

$$\begin{array}{ll} (a) S = \{(x, y, z) : y = 0\} & (e) S = \{(x, y, z) : x + z \leq 0\} \\ (b) S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} & (f) S = \{(x, y, z) : xy = 0\} \\ (c) S = \{(x, y, z) : x + z = 1\} & (g) S = \{p(x) = x^3 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\} \\ (d) S = \{(x, y, z) : x + z = 0\} & (h) S = \{p(x) = ax^3 + b : a, b \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

4. Sea $V = \{a\}$ el conjunto con el único elemento "a". Determinar si V es un Espacio vectorial sobre los reales con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas a continuación:

$$+ : a + a = a$$

$$\cdot : aa = a, \text{ Para todo } a \text{ Real.}$$

6. Sea \mathbb{R}^2 el conjunto de los pares de números reales, se definen las operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$k(x, y) = (k^2x, k^2y)$$

Estudiar las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

7. Probar mediante un ejemplo que la unión de dos subespacios vectoriales no es en general un subespacio vectorial.

Álgebra Lineal

Espacios Vectoriales

8. En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 , se considera el subconjunto

$$M = \{(w, x, y, z) / w + x + y + z = 0\}$$

Probar si M es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

9. Indique si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pertenece al espacio generado por las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

10. Sea $A = \{(x, y, z) / y = x + z\}$, Hallar su conjunto generador.