Números complejos-Conceptos básicos

mathspace.jimdo@gmail.com
www.mathspace.jimdo.com

El ejemplo típico de una ecuación que no tiene solución en el conjunto de los números reales es $x^2 + 1 = 0$ ó $x^2 = -1$, ya que no existe ningún real x tal que su cuadrado sea un número negativo. De manera más general, la ecuación: $x^2 + bx + c = 0$, con coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, no tiene solución real si $b^2 - 4ac < 0$. Se hace, por tanto, necesario ampliar el conjunto de los números reales a un conjunto donde puedan resolverse situaciones como las anteriores, de manera que esté en correspondencia biunívoca con una parte de él. Dicho conjunto es llamado: Conjunto de los números Complejos y se denota por la letra $\mathbb{C}$.

A continuación se describen las definiciones y los resultados más importantes relacionados con los números complejos.

Definición: Llamamos conjunto de los números complejos y lo denotamos con la letra $\mathbb{C}$ al conjunto de los pares de números reales (a, b) en el cual definimos las siguientes operaciones:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Multiplicación: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

En el número complejo (a, b) llamaremos a a la parte real y a b la parte imaginaria.

Dos propiedades que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son:

Igualdad: $(a, b) = (c, d)\,,\ a = c \ \wedge \ b = d$

Multiplicación por un escalar: $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Dados (2,1) y (0,-3) números complejos, hallar:

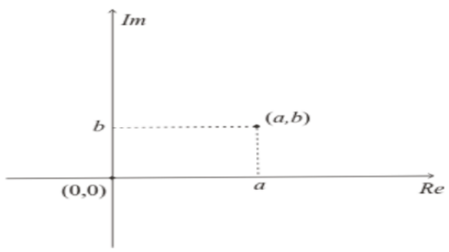
$(2, 1) + (0, -3) = (2, -2)$
$(2, 1)(0, -3) = (3, -6)$

Ejercicio: Dados los datos del ejemplo anterior, determinar:

$(2, 1)(0, -3) - 2(-1, 1) =$

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos mediante el plano $\mathbb{R}^2$, en esta representación se le dice eje real (Re) al eje de las x y eje imaginario (Im) al eje de las y.

Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano $\mathbb{R}^2$ el número complejo $(a, 0)$ coincide con el número real a. De este modo tenemos $a = (a, 0)$ cuando $a \in \mathbb{R}$. Los números complejos de la forma $(0, b)$ son llamados imaginarios puros.



Gráfica 1: Representación del número complejo (a, b).

Multiplicación por un escalar: $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

Propiedades de campo: Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $\alpha\beta = \beta\alpha$
3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
4. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
5. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
6. El número complejo $0 = (0, 0)$ satisface $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
7. El número complejo $1 = (1, 0)$ satisface $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
8. Exite un único número complejo $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$
9. Para todo $\alpha \neq 0$, existe un único número complejo $\alpha^{-1} \neq 0$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

Denotaremos el número complejo $(0, 1)$ con la letra $\boldsymbol{i}$ y lo llamaremos unidad imaginaria.

$i^2 = -1$.

Ahora estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación: $x^2 + 1 = 0$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$

Forma binómica de un número complejo
Sea $z = (a, b)$ un número complejo. Entonces podemos escribirlo en la forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Pero como $(1, 0) = 1$ y $(0, 1) = i$, entonces $(a, b) = a + bi$. En este caso $a + bi$ se llama forma binómica o binomia del número complejo.

Suma y multiplicación de números complejos en la forma binómica

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ porque $i^2 = -1$.

Ejemplo: Si $z_1 = (3, 2)$ y $z_2 = (4, -1)$, halle $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$.
$z_1 + z_2 = (3, 2) + (4, -1) = (3 + 2i) + (4 - i) = 7 + i$.

$z_1 z_2 = (3, 2)(4, -1) = (3 + 2i)(4 - i) = 12 - 3i + 8i - 2i^2 = (12 + 2) + (-3 + 8)i = 14 + 5i$.

Conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo llamaremos conjugado del número z, al número $\overline{z} = a - bi$, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto.

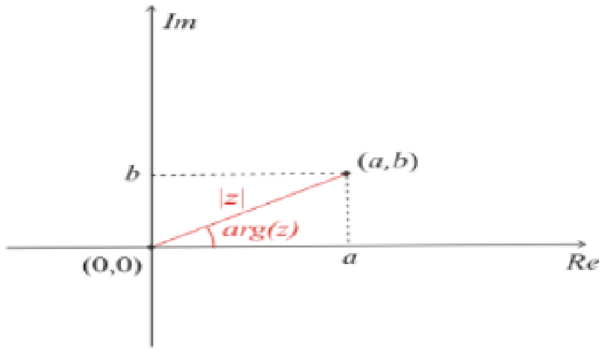
Ejemplo Si $z = 3 + 2i$, entonces $\overline{z} = 3 - 2i$ y si $z = 3 - 2i$, entonces $\overline{z} = 3 + 2i$.

Módulo y argumento de un número complejo

Sea $z = (a, b) = a + bi$ un número complejo cualquiera. Llamaremos ***módulo*** del número complejo z , al número real dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z.

Llamaremos ***argumento*** del número complejo $z = a + bi$, al ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a z. El argumento de z se denota por $arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$$arg(z) = arctan(\tfrac{b}{a}).$$



Gráfica 2: Módulo y argumento de un número complejo.

Propiedad:
$z\overline{z} = |z|^2$.

División de números complejos

La división de números complejos se realiza mediante la multiplicación y división por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{|z|^2}.$$

Ejemplo: Dados $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = -1 + 2i$, halle $\frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-8}{5} - \frac{1}{5}i$

Ejercicios propuestos:

1. Escriba la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

   a) $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$
   b) $(5 + 2i) - (3 - 6i)$
   c) $(1 - \frac{2}{5}i)(7 + 9i)$
   d) $(5 - 2i)(5 + 2i)$
   e) $(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}i) + (-\frac{2}{7} + \frac{3}{5}i)$
   f) $(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}i) - (-\frac{2}{7} + \frac{3}{5}i)$
   g) $(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}i)(-\frac{2}{7} + \frac{3}{5}i)$
   h) i^3
   i) i^5
   j) i^{20}
   k) i^{33}
   l) $\frac{3}{2+4i}$
   m) $\frac{3}{2-4i}$
   n) $\frac{-3}{-2-4i}$
   ñ) $\frac{1-5i}{6-2i}$
   o) $\frac{1+5i}{6+2i}$
   p) $\frac{4+\sqrt{-81}}{7-\sqrt{-64}}$
   q) $(2 - \sqrt{-4})(3 - \sqrt{-16})$
   r) $(-3 + \sqrt{-25})(8 - \sqrt{-36})$
   s) $\frac{\sqrt{-36}\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$
   t) $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\sqrt{-81}}$

2. Encuentre los valores de x ey y, donde x e y son números reales.

   a) $4 + (x + 2y)i = x + 2i$
   b) $\frac{3}{2} + (\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y)i = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}i$
   c) $(2x - y) - 16i = 10 + 4yi$
   d) $(3x - 4y) - 5i = 6 + 7yi$
   e) $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$
   f) $5 + (2x + 4y)i = 3x - 6i$

3. Encuentre el inverso multiplicativo de cada número complejo.

   a) $3 + 2i$
   b) $4 + 5i$
   c) $\frac{2}{3} + 7i$
   d) $6 - 5i$
   e) $3 + \frac{3}{8}i$
   f) $\frac{5}{4} - \frac{3}{7}i$

4. Para cada número complejo y su respectivo inverso multiplicativo del ejercicio anterior:

   a) Ubique cada número en el plano complejo.
   b) Determine el módulo y el argumento de cada número complejo.

5. Sean z y w números complejos, determine un ejemplo para cada una de las siguientes propiedades de los números complejos:

   a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
   b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
   c) $(\overline{\frac{z}{w}}) = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
   d) $|z| \geq 0$.
   e) $|z - w| = |w - z|$.
   f) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
   g) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
   h) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
   i) $z\overline{z} = |z|^2$.