

FUNCIONES

mathspace.jimdo@gmail.com

www.mathspace.jimdo.com

RECUERDE QUE EL USO DE GRAFICADORES ES UNA HERRAMIENTA ÚTIL PARA CORROBORAR SUS RESULTADOS

1. Exprese la regla dada en forma de función y determine los conjuntos de definición. **Por ejemplo:** la regla «elevant al cuadrado y luego restar 5» se expresa como: $f(x) = x^2 - 5$.

a) Multiplicar por 3 y después sumar 1.

d) Sumar 2 y a continuación elevar al cuadrado.

b) Sumar 1 y después multiplicar por 3

e) Elevar al cuadrado, sumar 1 y finalmente extraer la raíz cuadrada.

c) Restar 5 y luego dividir por 7

2. Exprese la función (o regla) con palabras.

a) $f(x) = \frac{x}{3} - 5$

c) $h(x) = 2x^2 - 3$

b) $g(x) = \frac{x-5}{3}$

d) $j(x) = \sqrt{2x-1}$

3. Si a y h son números reales, encuentre: I. $f(a)$, II. $f(-a)$, III. $-f(a)$, IV. $f(a+h)$, V. $f(a) + f(h)$
VI. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

a) $f(x) = 5x - 2$

c) $f(x) = x^2 - x + 3$

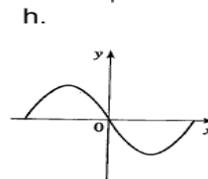
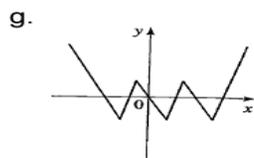
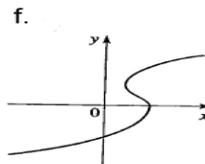
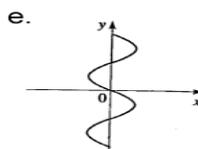
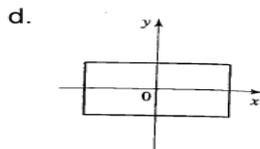
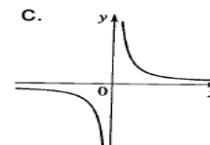
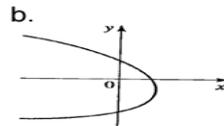
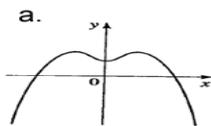
e) $f(x) = 3 - x^2$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = 3 - 4x$

f) $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

4. Determine si cada una de las curvas es la gráfica de una función de x .



5. Trace la gráfica de la ecuación y marque las intersecciones con los ejes coordenados.

a) $y = 2x - 3$

c) $y = -x + 1$

b) $y = -2x - 3$

d) $y = \frac{1}{4}x + 3$

6. I. Trace la recta, determine la ecuación que pasa por A y B y encuentre su pendiente m . II. Diga si la recta es creciente o decreciente.

a) $A(-3, 2); B(5, -4)$

c) $A(-3, 3); B(4, -4)$

b) $A(2, 5); B(-7, 2)$

d) $A(4, -2); B(-3, -2)$

7. Dibuje la gráfica de la recta que pasa por el punto P para cada valor de m .

a) $P(3, 1); m = \frac{1}{2}, -1, \frac{-1}{5}$

b) $P(-2, 4); m = 1, -2, \frac{-3}{2}$

8. Traza las gráficas de las rectas en el mismo plano coordenado.

a) $y = x + 3, y = x + 1, y = -x + 1$

b) $y = -2x - 1, y = -2x + 3, y = \frac{1}{2}x + 3$

9. Halle la ecuación de la recta de la forma pendiente-intersección ($y = mx + b$) de la recta que satisface las condiciones dadas.

a) Intersección en x igual a 4, intersección en y igual a -3.

b) Intersección en x igual a -5, intersección en y igual a -1.

c) Pasa por $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$.

d) Pasa por $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$.

10. Halle la pendiente e intersección en el eje y de la recta dada y trace su gráfica.

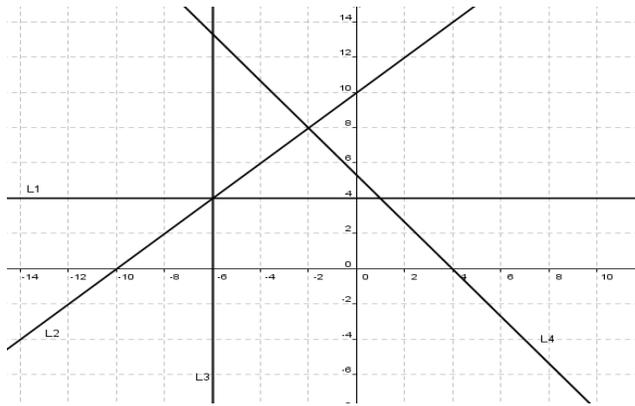
a) $2x = 15 - 3y$

c) $7x = -4y - 8$

b) $4x - 3y = 9$

d) $x - 5y = -15$

11. Encuentre la ecuación de las rectas mostradas en la figura.



12. I. Use la fórmula cuadrática para hallar los ceros de f . II. Encuentre el valor máximo o mínimo de f . III. Trace la gráfica de f .

a) $f(x) = x^2 - 4x$

c) $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

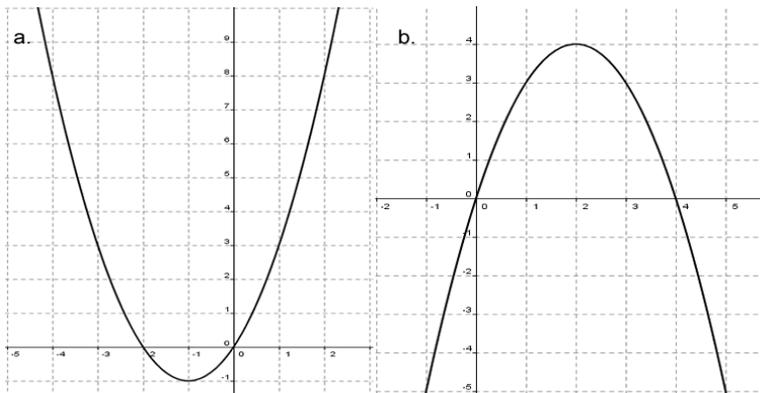
e) $f(x) = x^2 + 4x + 9$

b) $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

d) $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

f) $f(x) = -2x^2 + 20x - 43$

13. Encuentre la ecuación de la parábola dada.



14. Represente gráficamente las funciones dadas, cada grupo en un mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = 0$, $f(x) = 3$, $f(x) = -6$.

b) $f(x) = x$, $f(x) = 5x$, $f(x) = \frac{1}{5}x$.

c) $f(x) = x$, $f(x) = x + 4$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 5x + 4$, $f(x) = \frac{1}{5}x - 1$.

d) $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2 + 4$.

e) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 5)^2$, $f(x) = (x + 5)^2$.

f) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 5)^2 + 4$, $f(x) = (x + 5)^2 - 4$, $f(x) = (x + 5)^2 + 4$, $f(x) = (x - 5)^2 - 4$.

g) $f(x) = x^3$, $f(x) = x^3 + 5$, $f(x) = x^3 - 5$, $f(x) = (x + 4)^3 + 5$, $f(x) = (x - 4)^3 - 5$.

h) $f(x) = x^4$, $f(x) = x^4 + 5$, $f(x) = (x - 6)^4$.

- i) $f(x) = x^5$, $f(x) = x^5 + 5$, $f(x) = (x - 6)^5$.
 j) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + 6$, $f(x) = \frac{1}{x} - 5$, $f(x) = \frac{1}{x+6}$, $f(x) = \frac{1}{x-6}$,
 k) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2+4}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2-4}$.
 l) $f(x) = x^{(1/2)}$, $f(x) = x^{(3/2)}$, $f(x) = -x^{(1/2)}$, $f(x) = -x^{(3/2)}$.

15. I. Encuentre los cortes con los ejes coordenados de f II. Trace la gráfica de f haciendo uso de un software graficador; III. Encuentre el dominio y la imagen de f y IV. Halle los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante.

- a) $f(x) = 3x - 2$ g) $f(x) = \sqrt{2x + 7}$ m) $f(x) = x^2(x^2 - 1)$
 b) $f(x) = -2x + 3$ h) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ n) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$
 c) $f(x) = \sqrt{x + 4}$ i) $f(x) = \sqrt{8 - 3x}$ ñ) $f(x) = \frac{1}{10}(x^4 - x^3 + 20x^2)$
 d) $f(x) = \sqrt{4 - x}$ j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ o) $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 4x^2 - 9x + 36)$
 e) $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$ k) $f(x) = x^3 - x$
 f) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ l) $f(x) = x(3x - 1)(3x + 1)$

16. Para cada función racional, determine el dominio, las intersecciones con los ejes coordenados, las ecuaciones de las asíntotas verticales y trace la gráfica.

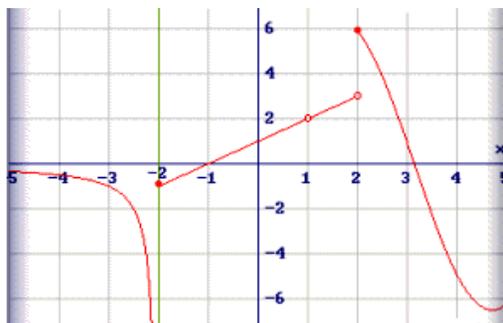
- a) $R(x) = \frac{9x^2-4}{3x^2-2}$ d) $R(x) = \frac{6x}{x^2-4}$ h) $R(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$ k) $R(x) = \frac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$
 b) $R(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$ e) $R(x) = \frac{x+4}{2-x}$ i) $R(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$ l) $R(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$
 c) $R(x) = \frac{5}{3x+2}$ g) $R(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$ j) $R(x) = \frac{4x}{6x^2+13x-5}$ m) $R(x) = \frac{1}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

17. Elabore las gráficas de las siguientes funciones definidas por partes, determine su dominio y rango.

- a)
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^3 + 1 & x > 0 \end{cases}$$
 c)
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & -2 \leq x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ -x + 3 & x > 1 \end{cases}$$

 b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^4 & x > 0 \end{cases}$$
 d)
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & x > -2 \\ -2x + 1 & x \leq -2 \end{cases}$$

18. Determine el dominio y rango de la función mostrada en la figura.



19. Elabore las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x|^{1/2}$

c) $f(x) = |x| + 1$

e) $f(x) = 1 - |x|$

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

d) $f(x) = |x + 1|$

f) $f(x) = |2x| - 1$

20. Trace las gráficas de las funciones $f(x)$ y $|f(x)|$.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 4x$

c) $f(x) = x^2 + 2x$

d) $f(x) = x + 2$

21. Dadas las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ Determine:

22. $f(x + 5)$

25. $g(x - 5)$

28. $-f(x)$

23. $f(x - 5)$

26. $f(x) + 5$

24. $g(x + 5)$

27. $g(x) - 5$

29. $-g(x)$

30. Dadas las funciones $f(x) = \text{Log}_4 x$ y $g(x) = \text{Log}_{\frac{1}{4}} x$ Determine:

31. $f(x + 5)$

34. $g(x - 5)$

37. $-f(x)$

32. $f(x - 5)$

35. $f(x) + 5$

33. $g(x + 5)$

36. $g(x) - 5$

38. $-g(x)$

39. Dadas las funciones $f(x) = \text{Ln} x$ y $g(x) = e^x$ Determine:

40. $f(x + 5)$ 43. $g(x - 5)$ 46. $-f(x)$
 41. $f(x - 5)$ 44. $f(x) + 5$
 42. $g(x + 5)$ 45. $g(x) - 5$ 47. $-g(x)$

48. Dadas las funciones $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = -4x^2 + 36$. Determine:

- a) $(f + g)(x)$ b) $(f - g)(x)$ c) $(f \times g)(x)$ d) $(f/g)(x)$

49. Halle la composición de las funciones $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \frac{x+1}{2}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$.

- a) $(f \circ f)(x)$ c) $(f \circ h)(x)$ e) $(g \circ g)(x)$ g) $(h \circ g)(x)$
 b) $(f \circ g)(x)$ d) $(g \circ f)(x)$ f) $(g \circ h)(x)$ h) $(h \circ h)(x)$

50. Determine cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.

- a) $f(x) = x$ c) $f(x) = |x + 3|$
 b) $f(x) = ax + b$ d) $f(x) = x^{-1}$

51. Verifique que f y g son funciones inversas mostrando que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$.

- a) $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{3}$
 b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ y $g(x) = \frac{x}{1+x}$
 c) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$

52. Halle la inversa de la función dada.

- a) $f(x) = 1 - x^3$ b) $f(x) = \frac{3x}{x-6}$ c) $f(x) = x^2 + 4, x \geq 0$

53. Represente gráficamente las siguientes funciones (que representan las funciones inversas de las funciones $Sen(x)$, $Cos(x)$ y $Tan(x)$ respectivamente) además, determine su dominio y rango:

- a) $f(x) = Arcsen(x)$
 b) $f(x) = Arccos(x)$
 c) $f(x) = Arctan(x)$

Nota: La inversa de la función $f(x) = Sen(x)$ también se denota $f(x) = Sen^{-1}(x)$ y **no se debe confundir** con: $\frac{1}{Sen(x)}$. De la misma manera para las funciones $f(x) = Cos(x)$ y $f(x) = Tan(x)$.

Noción intuitiva de Límite

Definición: El valor numérico aproximado que se encuentran por medio de las imágenes de las aproximaciones **menores** que un valor determinado $x=a$, usando la función $f(x)$, se denomina «Límite lateral izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a », y se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Definición: El valor numérico aproximado que se encuentran por medio de las imágenes de las aproximaciones **mayores** que un valor determinado $x=a$, usando la función $f(x)$, se denomina «Límite lateral derecho de $f(x)$ cuando x tiende a a », y se escribe de la siguiente manera:

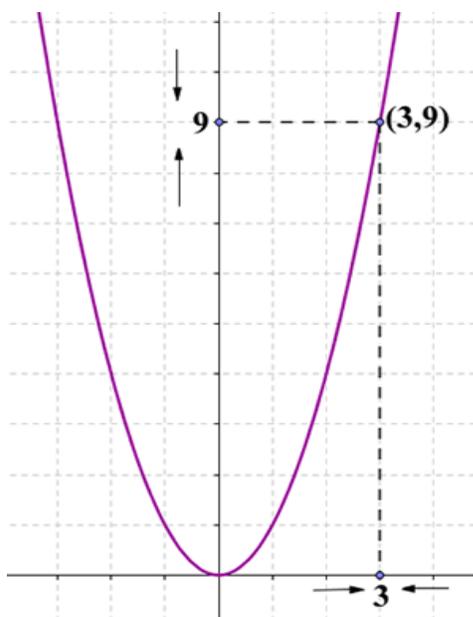
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Si los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a un número (único) L , cuando x se acerca a un número a por ambos lados (izquierda y derecha), entonces decimos que «El Límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a », y se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

El límite anterior se denomina «límite bilateral».

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$ ¿A qué valor se acerca $f(x)$, cuando x se acerca al valor $a = 3$?



x	$f(x)$	x	$f(x)$
2,5	6,25	3,5	12,25
2,6	6,76	3,4	11,56
2,7	7,29	3,3	10,89
2,8	7,84	3,2	10,24
2,9	8,41	3,1	9,61
2,99	8,9401	3,01	9,0601
2,999	8,994001	3,001	9,006001
3^-	9^-	3^+	9^+
$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 9^-$		$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9^+$	
Límites unilaterales			
$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$			

En cada uno de los siguientes casos se define una función $f(x)$ y un valor de x . Utilice la calculadora para investigar los límites unilaterales y el límite unilateral, en caso de que el valor de que a sea un número real, compare $f(a)$ con $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- 1) $f(x) = x^4$, $a = 0$ 20)
- 2) $f(x) = x^5$, $a = 0$
- 3) $f(x) = 1/x$, $a = 0$
- 4) $f(x) = x^x$, $a = 0$
- 5) $f(x) = |x + 3|$, $a = 3$
- 6) $f(x) = x \text{Log}(x)$, $a = 10$
- 7) $f(x) = \text{Sen}(x)$, $a = \pi/2$ 21)
- 8) $f(x) = \text{Cos}(x)$, $a = \pi/2$
- 9) $f(x) = \text{Tan}(x)$, $a = \pi/2$
- 10) $f(x) = \text{Cot}(x)$, $a = \pi/2$
- 11) $f(x) = \text{Sec}(x)$, $a = \pi$
- 12) $f(x) = \text{Csc}(x)$, $a = 3\pi/2$
- 13) $f(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{x}$, $a = 0$ 22)
- 14) $f(x) = \frac{\text{Sen}(4x)}{x}$, $a = 0$
- 15) $f(x) = \frac{\text{Sen}(5x)}{x}$, $a = 0$
- 16) $f(x) = \frac{\text{Tan}(x)}{x}$, $a = 0$
- 17) $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$, $a = 0$
- 18) $f(x) = \text{Sen}(1/x)$, $a = 0$ 23)
- 19)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^4 & x > 0 \end{cases} \quad a = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & -2 \leq x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ -x + 3 & x > 1 \end{cases} \quad a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & x > -2 \\ -2x + 1 & x \leq -2 \end{cases} \quad a = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^3 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad a = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ e^x & x > 1 \end{cases} \quad a = 1$$