Capítulo 2
ÁLGEBRA Y POLINOMIOS

www.mathspace.jimdo.com

Nota: La guía se debe estudiar previo a cada clase y además de ello, cada estudiante debe llevar al menos tres (3) ejercicios propuestos de cada ítem para ser discutidos en clase.

2.1. Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica que se forma mediante la suma o resta de términos algebraicos, llamados monomios. Cada monomio en un polinomio está compuesto por el producto de un coeficiente numérico y una o más variables elevadas a exponentes enteros no negativos. La forma general de un polinomio es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde:

- *P(x)* es un polinomio.
- a_n, a_{n-1},..., a_2, a_1, a_0 son coeficientes.
- *x* es la variable.
- *n* es un número entero no negativo llamado grado del polinomio, y representa el exponente más alto de la variable.

Ejemplo 1.

$P(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Tiene como coeficientes *5, -2* y *7* y un grado *n=2.*

<u>Los polinomios se pueden clasificar según el número de términos que contienen</u>:

- **Monomio:** Un polinomio que tiene solamente un término.

  Ejemplo 2: *2x*.

- **Binomio:** Un polinomio que tiene exactamente dos términos no semejantes.

  Ejemplo 3: *3x + 7.*

- **Trinomio:** Un polinomio que tiene exactamente tres términos no semejantes.

  Ejemplo 4: *x^2 + 2x + 1.*

2.2. Operaciones entre polinomios.

- **Suma y resta:** se agrupan y se suman o restan los términos semejantes (términos que tienen las mismas partes literales).

  Ejemplo 5: para sumar *2x^2 + 3x - 1* y *x^2 - x + 2*, se suman los términos semejantes para obtener *3x^2 + 2x + 1*.

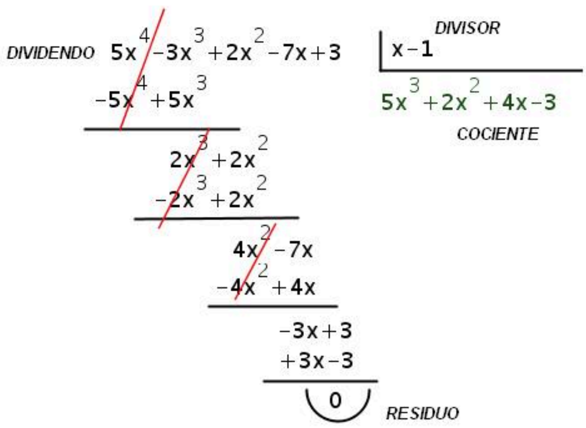
- **Multiplicación:** cada término de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro polinomio (propiedad distributiva), y luego se simplifican los términos semejantes.

  Ejemplo 6: al multiplicar *(x + 1)(x - 1)*, se obtiene *x^2 - 1*.

- **División:**
  La división de polinomios se realiza de manera similar a la división de números, pero en este caso, se dividen términos algebraicos. La forma general de la división de polinomios se expresa como $P(x)/D(x)$. Donde *P(x)* es el dividendo y *D(x)* es el divisor.

  Pasos:
  1. Ordenamos el dividendo y el divisor en el mismo orden.
  2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos el primer término del cociente.
  3. Luego esta cantidad obtenida la multiplicamos por todo el divisor y el producto se resta del dividendo (cambiando de signo).
  4. Se baja el siguiente término para obtener un nuevo dividendo.
  5. De aquí en adelante se repite el proceso tantas veces como sea necesario hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor.

  Ejemplo 7:



Fuente: Rufinizar.com

2.3. Raíces de polinomios

Las raíces de un polinomio son los valores de la variable (usualmente denotada como x) que hacen que el polinomio sea igual a cero. También se conocen como ceros, soluciones o puntos de intersección con el eje cuando hacemos referencia a la gráfica de una función. a es una raíz de un polinomio $P(a)$, entonces $P(a)=0$.

Ejemplo 8: si tenemos el siguiente polinomio $P(x) = x^2 - 3x + 2$, podemos comprobar que una de las raíces del polinomio es 1, ya que el valor numérico del polinomio en $x=1$ es igual a cero.

2.3.1. Teorema del Residuo. El Teorema del Residuo establece que si un polinomio $f(x)$ se divide entre $(x - a)$, donde a es cualquier número real o complejo, entonces el residuo es $f(a)$. Esto significa que para encontrar el residuo cuando un polinomio es dividido entre un binomio, el valor de x es igual al valor a, o $f(x) = f(a)$.

Ejemplo 9: si se considera el polinomio $f(x) = x^2 - 8x + 6$ y lo dividimos entre el binomio $x - 2$, se usa el Teorema del Residuo para encontrar el residuo.

Para calcular el valor de x, se hace $x - 2 = 0$, por lo que $x = 2$. Luego, reemplazamos x por 2 en el polinomio $f(x) = x^2 - 8x + 6$, obteniendo $2^2 - 8(2) + 6 = -6$.

Es decir, el residuo de la división de los polinomios del ejemplo es -6.

Ejercicio 1:

1. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$ es dividido por $x + 2$?
   Para encontrar el residuo, evaluamos el polinomio en $x = -2$.
2. Si ahora dividimos el polinomio $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$ por $x - 4$, ¿cuál es el residuo?
   En este caso, evaluamos el polinomio en $x = 4$.
3. Encuentra el residuo cuando $x^3 + 4x^2 - 5x + 10$ es dividido por $x + 5$.
   Aquí, evaluamos el polinomio en $x = -5$.
4. Encuentra el residuo cuando $x^3 - 5x^2 + 4x + 2$ es dividido por $(2x + 1)$.
   En este caso, evaluamos el polinomio en $x = -1/2$.
5. ¿Cuál es el residuo cuando $2x^3 - 2x^2 + 3x - 10$ es dividido por $(2x - 3)$?
   Para encontrar el residuo, evaluamos el polinomio en $x = 3/2$.

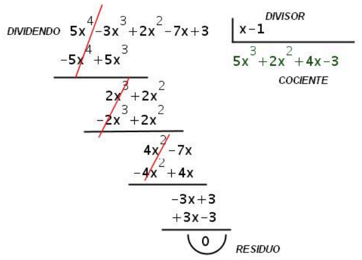
2.3.2. Teorema del Factor.

Un número c es una raíz (o cero) de un polinomio $P(x)$ si, y sólo si, $x - c$ es un factor de $P(x)$. Esto significa que si se evalúas el polinomio en $x=c$ y se obtiene $P(c)=0$, entonces $(x-c)$ es un factor del polinomio, es decir se puede expresar el polinomio $P(x)$ como:

$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)$

donde $Q(x)$ es el cociente resultante después de dividir $P(x)$ por $(x-c)$.

Ejemplo 10:

 Fuente: Rufinizar.com	$P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ $= (x-1)(5x^3 + 2x^2 + 4x - 3)$

2.3.3. Teorema fundamental del Álgebra.

Todo polinomio *P(x)* de grado *n >0* tiene por lo menos una raíz.

2.3.4. División sintética.

La división sintética es un método eficiente para dividir un polinomio *P(x)* por un binomio de la forma $(x-c)$, donde c es una constante. Este método es particularmente útil cuando se trabaja con polinomios de grado superior.

Proceso:

1. Escribir los coeficientes del polinomio $P(x)$ en orden descendente según el grado, incluyendo ceros para términos faltantes.

2. Colocar la constante c del binomio (x–c) en el lado izquierdo y se baja el primer coeficiente del polinomio.

c	$a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_1$	a_0

3. Bajar el coeficiente a_n hasta la tercera fila.

4. Multiplicar c por el coeficiente a_n y escribe el resultado en la segunda fila, pero una columna a la derecha.

5. Sumar la columna donde se escribió el resultado anterior y colocar el resultado debajo de dicha suma. Es decir, en la misma columna, tercera fila.

6. Multiplicar c por el resultado anterior y escribir el resultado a la derecha en la segunda fila.

7. Repetir los pasos hasta llegar al coeficiente a_0.

Ejemplo 11: Dividir el polinomio $P(x)= 2x^3-5x^2+3x-1$ entre ($x-2$).

Solución:

Se organizan los coeficientes:

2	2	-5	3	-1

Se realiza la división sintética:

2	2	-5	3	-1
		4	-2	2
	2	-1	1	1

El resultado es $2x^2 - x + 1$, y el residuo es 1.

Ejercicio 2: Use división sintética para realizar las siguientes divisiones (los dos puntos indican división):

1. $(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 8x + 1) : (x + 1)$.
2. $(x^3 + 4x^2 - 5x + 10) : (x - 2)$.
3. $(x^3 - 5x^2 + 4x + 2) : (x + 3)$.
4. $(2x^3 - 2x^2 + 3x - 10) : (2x - 3)$.
5. $(x^3 + 4x^2 - 5x + 10) : (x - 1)$

2.5. Factorización.

La factorización de polinomios es el proceso de descomponer un polinomio en un producto de polinomios de grado menor.

Factor común.

La factorización por factor común se aplica cuando hay una misma expresión en todos los términos del polinomio.

Ejemplo 12: en la expresión $5a + 10b$, el número 5 es un factor común ya que está presente en ambos términos (puesto que $10 = 5·2$). Por lo tanto, se puede reescribir la expresión como $5a + 10b = 5· (a + 2b)$.

Ejemplo 13: en la expresión $4x^2 − 2x$, $2x$ es un factor común y la expresión se puede reescribir como $4x^2 − 2x = 2x · (2x−1)$.

Agrupación por términos semejantes.

Es una técnica que se utiliza cuando un polinomio tiene un número par de términos y se pueden agrupar términos semejantes para factorizar de manera más eficiente

Ejemplo 14: x^3-x^2+2x-2

Se agrupan, en este caso los primeros dos términos y los últimos dos términos:
$(x^3-x^2)+(2x-2)$

Se factoriza por factor común en cada grupo:
$x^2(x-1)+2(x-1)$

Ahora, ambos términos tienen un factor común ($x-1$). Con lo que se obtiene:
$x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$

Trinomio Cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es un polinomio de tres términos que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado. Por lo tanto, un trinomio cuadrado perfecto consiste en un polinomio con dos cuadrados perfectos y otro término que es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Ejemplo 15: si se considera el binomio ($x + y$), al elevarlo al cuadrado obtenemos el trinomio cuadrado perfecto $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se debe verificar si el primer y último término son cuadrados perfectos, y si el término del medio es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y último término.

Ejemplo 16: Factorizar el trinomio $x^2 + 8x + 16$.

El primer y último término son cuadrados perfectos: $x^2 = (x)^2$ y $16 = (4)^2$. Las raíces cuadradas son x y 4. El doble del producto de las raíces es $2(x)(4) = 8x$, que coincide con el término del medio. Por lo tanto, el trinomio es un cuadrado perfecto: $(x + 4)^2$.

Ejemplo 17: Factorizar el trinomio $4x^2 + 12x + 9$.

El primer y último término son cuadrados perfectos: $4x^2 = (2x)^2$ y $9 = (3)^2$. Las raíces cuadradas son $2x$ y 3. El doble del producto de las raíces es $2(2x)(3) = 12x$, que coincide con el término del medio. Por lo tanto, el trinomio es un cuadrado perfecto: $(2x + 3)^2$.

Ejemplo 18: Factorizar el trinomio $x^2 - 8x + 16$.

El primer y último término son cuadrados perfectos: $x^2 = (x)^2$ y $16 = (4)^2$. Las raíces cuadradas son x y 4. El doble del producto de las raíces es $2(x)(4) = 8x$, que coincide con el término del medio pero con signo negativo. Por lo tanto, el trinomio es un cuadrado perfecto: $(x - 4)^2$.

Diferencia de Cuadrados perfectos.

La diferencia de cuadrados perfectos es una identidad algebraica que se presenta cuando se tiene una expresión de la forma $a^2 - b^2$, donde a y b son cualquier número real o complejo. Esta identidad se puede factorizar como el producto de una suma y una diferencia de dos términos. La expresión de la diferencia de cuadrados es: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Ejemplo 19: si se considera la expresión $x^2 - 9$, se puede observar que es una diferencia de cuadrados perfectos, ya que $x^2 = (x)^2$ y $9 = (3)^2$. Por lo tanto, se puede reescribir la expresión como: $(x + 3)(x - 3)$.

Ejemplo 20: Factorizar $25x^2 - 81$. Se observa que el primer y último término son cuadrados perfectos: $25x^2 = (5x)^2$ y $81 = (9)^2$.
Por lo tanto, se puede reescribir la expresión como: $(5x + 9)(5x - 9)$.

Factorización Trinomio de la forma x^2+bx+c.

Se puede factorizar utilizando el método de factorización por agrupación. La forma factorizada general será de la forma $(x+m)(x+n)$, donde m y n son dos números cuya suma es b y cuyo producto es c.

Ejemplo 21: Considerar el trinomio x^2+5x+6.

Se buscan dos números cuya suma sea 5 (el coeficiente de x) y cuyo producto sea 6 (el término independiente). Los números que cumplen estas condiciones son 2 y3.

De ahí que: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Ejemplo 22: Considera el trinomio x^2+6x+5.

Se buscan dos números cuya suma sea 6 (el coeficiente de x) y cuyo producto sea 5 (el término independiente). Los números que cumplen estas condiciones son 5 y 1.

De ahí que: $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$.

Ejemplo 23: Considera el trinomio $x^2+10x+21$.

Se buscan dos números cuya suma sea 10 (el coeficiente de x) y cuyo producto sea 21 (el término independiente). Los números que cumplen estas condiciones son 7 y 3.

De ahí que: $x^2+6x+5=(x+7)(x+3)$.

Factorización Trinomio de la forma ax^2+bx+c

La factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ es un proceso que se utiliza para descomponer el trinomio en un producto de dos binomios.

Fórmula General:

La fórmula general es una herramienta utilizada para factorizar ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. La fórmula general para resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c=0$ es:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es importante aclarar que la expresión anterior resuelve las raíces del polinomio, así que a partir de las raíces determinamos la factorización.

Ejemplo 24: Usar la fórmula general para ecuaciones cuadráticas con el objetivo de factorizar el siguiente polinomio: $x^2 - 5x + 6$.

Solución:

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2(1)}$

$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{5\pm1}{2}$

Con lo que se obtiene:

$x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

De ahí que la factorización del polinomio queda de la siguiente manera:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$.

Ejercicio 3: Usar la fórmula general para ecuaciones cuadráticas con el objetivo de factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^2 - 4x + 3$.

2. $x^2 + 3x - 10$.

3. $4x^2 + 8x - 12$.

4. $3x^2 - 7x - 6$.

Completando Cuadrados:

La idea principal es convertir el trinomio en un cuadrado perfecto y luego factorizarlo.

Ejemplo 25: Considera el trinomio *x^2-6x+9*.

Agrega y resta la mitad del coeficiente de *x* al cuadrado del término lineal.

x^2-6x +(-6/2)^2 - (-6/2)^2+9.

x^2-6x +(9) - (9)+9.

Factoriza el cuadrado perfecto y escribe el trinomio como el cuadrado de un binomio.

x^2-6x +(9)=(x-3)^2

De ahí que: *x^2-6x+9 = (x-3)^2*

Ejercicio 4: Completar cuadrados para factorizar los siguientes polinomios.

1. *x^2+4x+4.*
2. *x^2-10x+25.*
3. *2x^2-4x-6.*

Suma o diferencia de cubos perfectos

- **Suma de Cubos Perfectos:**
  a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)
- **Resta de Cubos Perfectos:**
  a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)

Ejemplo 26: Factorizar 64x^3+1.

64x^3 es (4x)^3 y 1=1^3. Entonces: 64x^3+1= (4x+1)(16x^2-4x+1)

Ejemplo 27: Factorizar 27y^3-8.

27y^3 es (3y)^3 y 8=2^3. Entonces: 27y^3-8= (3y-2)(9y^2+6y+4).

Ejercicio 5: Factorizar los siguientes polinomios.
1. 125y^3-1
2. 8p^3+q^3
3. a^6-b^6

2.6. Expansión Binomial

La expansión binomial es una expresión que se utiliza para determinar la expansión de la potencia *n-ésima* de un binomio sin llevar a cabo una multiplicación directa. En la expansión, *a* y *b* son números reales y *n* es un número entero.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Note que en las expansiones anteriores el primer término (a) inicia con la potencia n y disminuye en una unidad, mientras que el el exponente del segundo término (b) aumenta también en una unidad.

2.6.1. Triángulo de Pascal

El Triángulo de Pascal es una disposición triangular de números que se utiliza para representar los coeficientes en la expansión binomial.

Construcción:

1. La primera fila contiene solamente el número 1.
2. La segunda fila contiene dos números 1.
2. A partir de la tercera fila, cada número es la suma de los dos números directamente encima de él en la fila anterior.

Observación: ¿Qué pasa si el binomio es (*a*-*b*) ?

1	----------->	$(a+b)^0$	$= 1$
1 1	----------->	$(a+b)^1$	$= a + b$
1 2 1	----------->	$(a+b)^2$	$= a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	----------->	$(a+b)^3$	$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	----------->	$(a+b)^4$	$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
		$(a+b)^5$	

Ejercicio 6: Expandir y simplificar usando el Triángulo de Pascal.

1. $(2x - y)^3$
2. $(3x + 2)^4$
3. $(7a - 2b)^5$