# Capítulo 4
## *Sucesiones*
Versión Beta 1.0

www.mathspace.jimdo.com

# *4.1. Sucesiones.*

Una sucesión es una función, denotada como $\{a_n\}$. Tal que:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \longmapsto & X & \subseteq & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n) & = & a_n \end{array}$$

- $a_n$ es el *n*-ésimo término de la sucesión o término general.
- Una sucesión también se puede presentar mediante una ley de recurrencia, donde cada términio (excepto el primero) se expresa en función de los términos anteriores.
- La sucesión se puede presentar mediante una secuencia de términos $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Si la sucesión tiene una cantidad determinada de términos se denominará *Sucesión Finita*. Si la sucesión tiene una cantidad no definida de términos, se llamará *Sucesión Infinita*.

**Ejemplo 1.**

| **Sucesión infinita presentada de forma explícita** | **Sucesión infinita presentada de forma recursiva** |
|---|---|
| $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$<br><br>Es decir:<br><br>$a_1 = \frac{1}{2}$<br><br>$a_2 = \frac{2}{3}$<br><br>$a_2 = \frac{3}{4}$<br><br>$\vdots$<br>$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ | $a_1 = 1;$<br>$a_n = a_{n-1} + 2; n \geq 2.$<br><br>Es decir:<br><br>$a_1 = 1$<br><br>$a_2 = 3$<br><br>$a_3 = 5$<br><br>$\vdots$<br><br>$\{a_n\} = \{1,3,5, \dots\}$ |

**Nota:** No siempre una sucesión que se escribe de forma explícita puede escribirse también de forma recursiva y viceversa.

**Ejemplo 2.**

<table>
<tr><th colspan="2">Sucesión finita</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\{a_k\}_{k=1}^{4} = \{1,4,7,10\}$</td><td>Forma explícita<br><br>$\{a_k\} = 1 + 3(k-1);\ 1 \leq k \leq 4$</td></tr>
<tr><td>Forma recursiva<br><br>$a_1 = 1$<br>$a_k = a_{k-1} + 3;\ 2 \leq k \leq 4$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Sucesión infinita</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{3,7,11,15,\ldots\}$</td><td>Forma explícita<br><br>$\{a_k\} = 3 + 4(k-1)$</td></tr>
<tr><td>Forma recursiva<br><br>$a_1 = 3;$<br>$a_k = a_{k-1} + 4;\ k \geq 2.$</td></tr>
</table>

**Ejemplo 3.**

Si $a_n = \frac{n^2-10}{n+1}$, calcular $a_4 + a_9$

$$a_4 = \frac{4^2 - 10}{4+1} = \frac{6}{5}$$

$$a_9 = \frac{9^2 - 10}{9+1} = \frac{71}{10}$$

De ahí que: $a_4 + a_9 = \frac{6}{5} + \frac{71}{10} = \frac{83}{10}$

**Ejemplo 4.**

Una sucesión está definida recursivamente como sigue: $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$; donde $a_0 = 2$ y $a_1 = 3$. Determine $a_4$.

$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot a_0 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 6 \cdot 3 = 18$
$a_4 = a_3 \cdot a_2 = 18 \cdot 6 = 108$

Por tanto, $a_4 = 108$.

### *4.1.1. Convergencia*

Una sucesión $\{a_n\}$, es *convergente* si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. En caso contrario, se dice que la sucesión es *divergente*. Esto es:

Sea $L \in \mathbb{R}$. El límite **de una sucesión** $\{a_n\}$ es $L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para cada entero $n > M$.

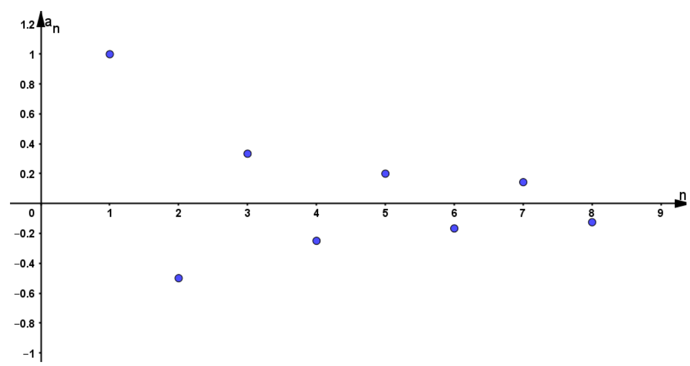
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Y se dice que $\{a_n\}$ converge a $L$.

**Ejemplo 5**.

Sea la sucesión $\{a_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(Observe que según la representación gráfica y de una manera intuitiva, a medida que aumenta $n$ se puede decir que los términos de la sucesión se acercan a 0).



Representación gráfica de los términos de la sucesión del Ejemplo 5.

Note que la sucesión se puede escribir como la siguiente regla de correspondencia de manera expícita:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ con } a_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

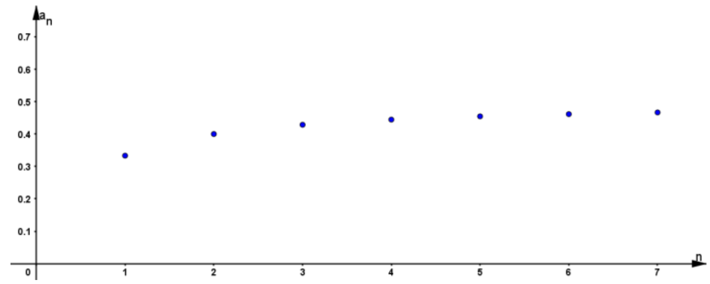
De ahí que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

Por tanto, $\{a_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ es una sucesión convergente y se dice que converge a 0.

**Ejemplo 6**.

Determinar si $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es convergente o divergente.



Representación gráfica de los términos de la sucesión del Ejemplo 6.

Para determinar la convergencia de una sucesión, se halla el $\lim_{n\to\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$$

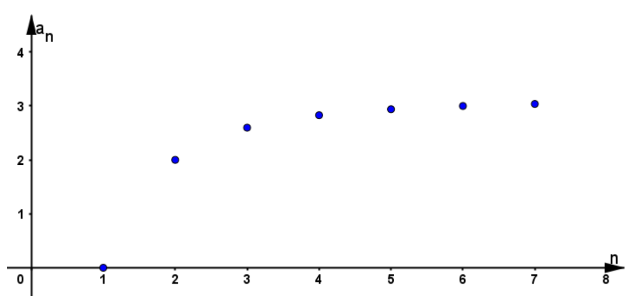
(Recuerde que dividir entre la variable con la potencia más alta es un método de solución para límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, como es este caso).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

De ahí que la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es convergente y converge a $\frac{1}{2}$.

**Ejemplo 7**.

Determinar si $\{a_n\} = \left\{nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es convergente o divergente.



Representación gráfica de los términos de la sucesión del Ejemplo 7.

Para determinar la convergencia de una sucesión se halla el $\lim_{n\to\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Se multiplica y se divide entre $\left(\frac{\pi}{n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right) nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Haciendo uso del método de sustitución o cambio de variable:

Sea $u = \frac{\pi}{n}$ entonces, si $n \to \infty$ se tiene que $u \to 0$. De ahí que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{u\to 0} \frac{(\pi)sen(u)}{(u)} = \pi \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{(u)} = \pi(1) = \pi.$$

De ahí que la sucesión $\{a_n\} = \left\{nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es convergente y converge a $\pi$.

**Ejemplo 8.**

**Identificando la convergencia y divergencia de sucesiones**

### *4.1.2. Cotas*

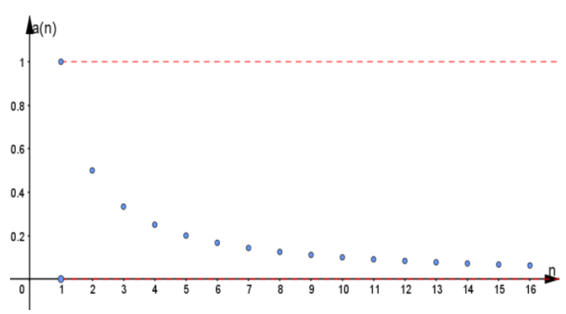
***Definición:***

1. La sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión acotada si existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $C$ es una *cota superior* de una sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \leq C$ para todo número natural *n*. Si una sucesión tiene una *cota superior*, diremos que la sucesión está *acotada superiormente*.
3. $c$ es una *cota inferior* de una sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \geq c$ para todo número natural *n*. Si una sucesión tiene una *cota inferior*, diremos que la sucesión está *acotada inferiormente*.

**Ejemplo 9.**

**1.** $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ es acotada superior e inferiormente.

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, 0\right\}$$



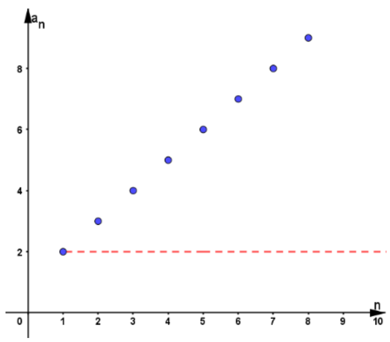

Cotas superiores: _______________

Mínima cota superior: __________

Cotas inferiores: ______________

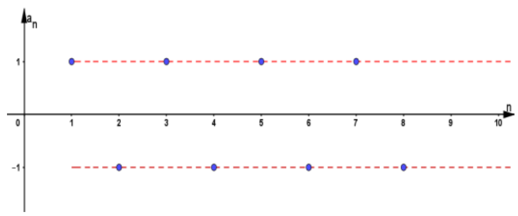
Máxima cota inferior: __________

**2.** $\{a_n\} = \{n+1\}$ es acotada inferiormente.
$\{a_n\} = \{2,3,4,5,\ldots\}$




| |
|---|
| Cotas inferiores: ______________ |
| Máxima cota inferior: __________ |

**3.** $\{a_n\} = \{(-1)^{n-1}\}$ es acotada superior e inferiormente.
$\{a_n\} = \{1,-1,1,-1,\ldots\}$




| |
|---|
| Cotas superiores: ______________ |
| Mínima cota superior: __________ |
| Cotas inferiores: ______________ |
| Máxima cota inferior: __________ |

***Teorema:*** Si $a_n$ y $b_n$ son sucesiones convergentes, entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n\,;\ k \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n};\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

### *4.1.3. Monotonía de Sucesiones*

Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona* si sus términos son *no decrecientes*, es decir:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots;$$

o si sus términos son *no crecientes*, es decir:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots.$$

Es decir $\{a_n\}$ es *creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ o $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Y $\{a_n\}$ es *decreciente* si $a_n \geq a_{n+1}$ o $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

**Ejemplo 10.** Sea la sucesión: $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \dots, \frac{1}{2}\right\}$

Si

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Entonces

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

De ahí que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2n+3}}{\frac{n}{2n+1}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} \geq 1$$

Luego,

$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es creciente.

**Ejemplo 11.** Sea la sucesión: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$

Si

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Entonces

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

De ahí que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Luego,

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente.

Tenga en cuenta:

• $\{a_n\}$ creciente $\Rightarrow a_1$ es cota inferior de la sucesión.

• $\{a_n\}$ creciente y tiene límite $L \Rightarrow L$ es cota superior de la sucesión.

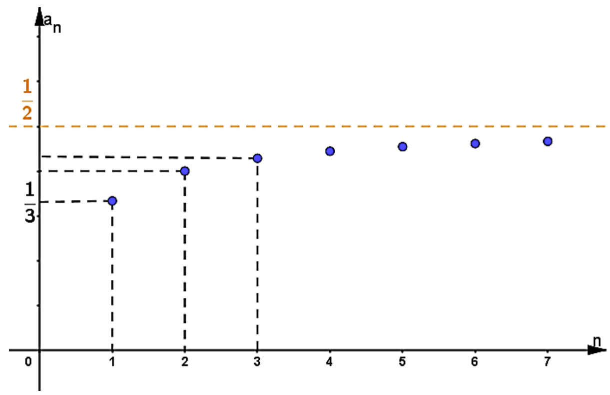
• $\{a_n\}$ decreciente $\Rightarrow a_1$ es cota superior de la sucesión.

• $\{a_n\}$ decreciente y tiene límite $L \Rightarrow L$ es cota inferior de la sucesión.

***Teorema:***

Si una sucesión es monótona y convergente, entonces es acotada.

**Ejemplo 12.** $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \dots, \frac{1}{2}\right\}$.




$\{a_n\}$ es creciente (monótona) y converge a $\frac{1}{2}$. Al ser $\{a_n\}$ monótona y convergente, entonces es acotada.

En este caso, la **mínima cota superior** es $\frac{1}{2}$ y la **máxima cota inferior** es $\frac{1}{3}$.

**Ejercicios propuestos:**

Analizar cada una de las siguientes sucesiones. Determine si son convergentes, monótonas y/o acotadas. De ser acotadas determine las respectivas cotas.

1. $\{a_n\} = \{-n\}$
2. $\{b_n\} = \{(-1)^{n-1}2^n\}$
3. $\{c_n\} = \left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\}$
4. $\{a_n\} = \{3 + 2(n-1)\}$
5. $\{a_n\} = \left\{134\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$
6. $\{c_n\} = \{(n-2)^2\}$
7. $\{b_n\} = \{(-1)^n n^2\}$
8. $\{a_n\} = \{1\}$
9. $\{a_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$
10. $\{a_n\} = \{n(-1)^{n-1}\}$
11. $\{a_n\} = \frac{2^n}{n!}$
12. $\{c_n\} = \left\{\frac{3n^2+1}{2n^2-n}\right\}$
13. $\{c_n\} = \left\{\frac{2n^2+1}{3n-1}\right\}$
14. $\{c_n\} = \left\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$