CÁLCULO 1

CAPÍTULO 1
LÍMITES Y CONTINUIDAD

con enlaces a material audiovisual e instrucciones en GeoGebra

INTRODUCCIÓN DEL CURSO

Los contenidos del curso se desarrollarán con el apoyo de los vídeos de *Khan Academy*, videos propios, guías de clase y talleres propuestos que estarán disponibles en www.mathspace.jimdo.com.

Previo a cada clase, el estudiante debe leer la teoría junto con los ejemplos, tomar los respectivos apuntes, ver los videos y trabajar sobre los ejercicios propuestos. En la clase se hacen las explicaciones correspondientes y se aclaran dudas para así avanzar sobre el desarrollo de más ejemplos y afianzar contenidos.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Por favor,
pase a la siguiente diapositiva,
solo hasta que termine de ver todos los vídeos

Ejemplo 1.

Ejemplo 2.

Ejemplo 3.

Ejemplo 4.

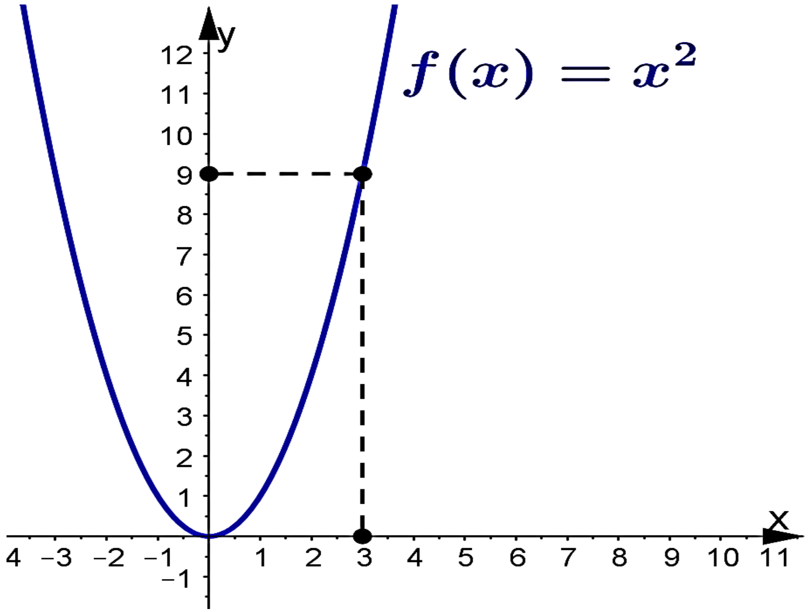
Ejemplo 5.

Ejemplo 6.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

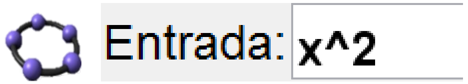
Ejemplo 7. En Geogebra

Veamos cual es el comportamiento de la función $f(x) = x^2$ cerca al punto $x = 3$. (use su calculadora para completar las tablas dadas).



$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
2.5	$(2.5)^2 = 6.25$
2.6	
2.7	
2.8	
2.9	
2.99	
2.999	
$\lim_{x \to 3-} x^2 = 9-$	

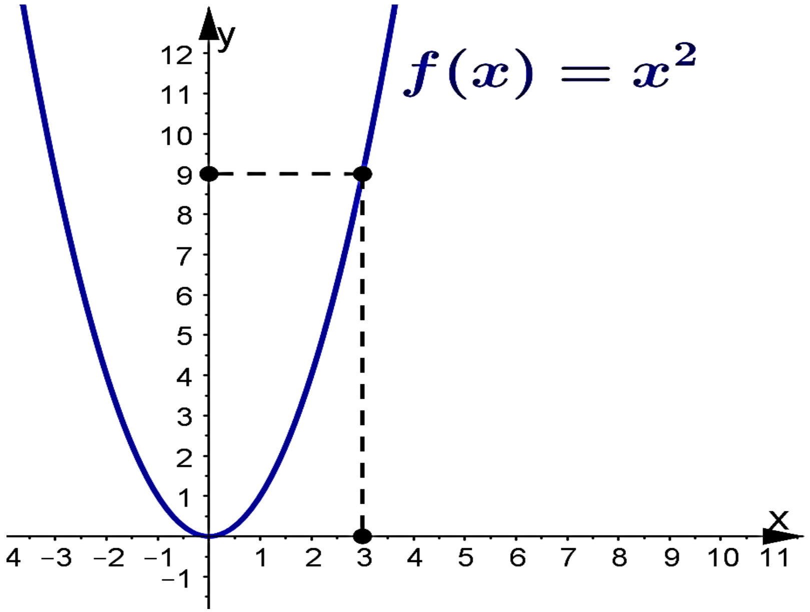
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3.5	$(3.5)^2 = 12.25$
3.4	
3.3	
3.2	
3.1	
3.01	
3.001	
$\lim_{x \to 3+} x^2 = 9+$	



INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejemplo 7. En Geogebra

Veamos cual es el comportamiento de la función $f(x) = x^2$ cerca al punto $x = 3$. (use su calculadora para completar las tablas dadas).



$\lim\limits_{x \to 3-} x^2$ =9-

Se lee: Límite cuando x tiende a 3 por la izquierda de x^2 es igual a 9 por la izquierda.

$\lim\limits_{x \to 3+} x^2$ =9+

Se lee: Límite cuando x tiende a 3 por la derecha de x^2 es igual a 9 por la derecha.

En conclusión:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

Además:

$$f(3) = 9$$

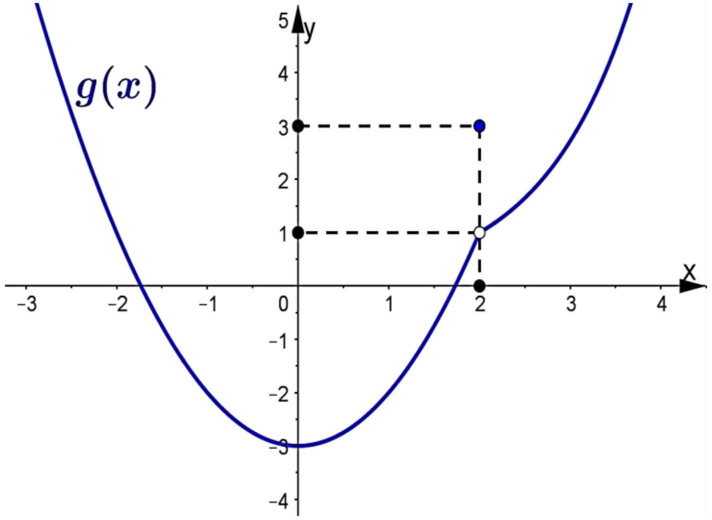
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejemplo 8. En Geogebra

Veamos cual es el comportamiento de la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3; & x < 2 \\ 3; & x = 2 \\ e^{x-2}; & x > 2 \end{cases}$$

cerca al punto $x = 2$.



x	$g(x)$
1.5	$(1.5)^2 - 3$= -0.75
1.6	
1.7	
1.8	
1.9	
1.99	
1.999	

x	$g(x)$
2.5	$e^{(2.5-2)}$= 1.65
2.4	
2.3	
2.2	
2.1	
2.01	
2.001	

Entrada: Función(x^2-3, -∞, 2)

Entrada: (2,3)

Entrada: Función(e^(x-2), 2, ∞)

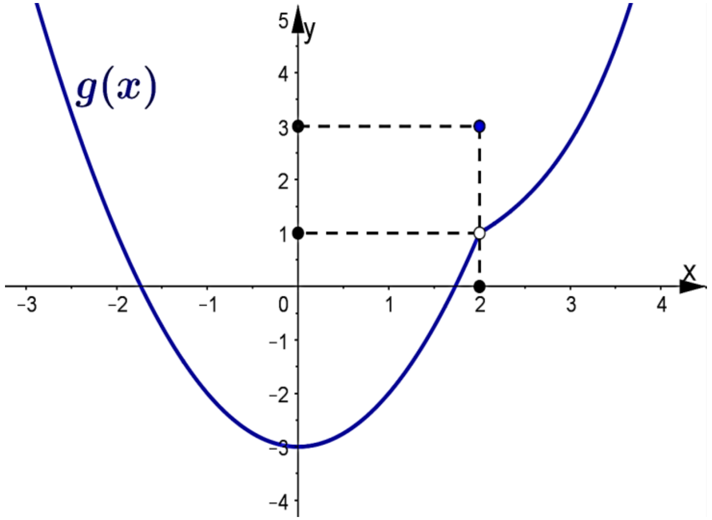
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejemplo 8. En Geogebra

Veamos cual es el comportamiento de la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3; & x < 2 \\ 3; & x = 2 \\ e^{x-2}; & x > 2 \end{cases}$$

cerca al punto $x = 2$.



$\lim_{x \to 2-} g(x) =$____

Se lee: Límite cuando x tiende a ____ por la __________ de _____ es igual a ____ por la ______________

$\lim_{x \to 2+} g(x) =$ ____

Se lee: Límite cuando x tiende a ____ por la __________ de _____ es igual a ____ por la ______________

En conclusión:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \_\_\_\_\_$$

Además:

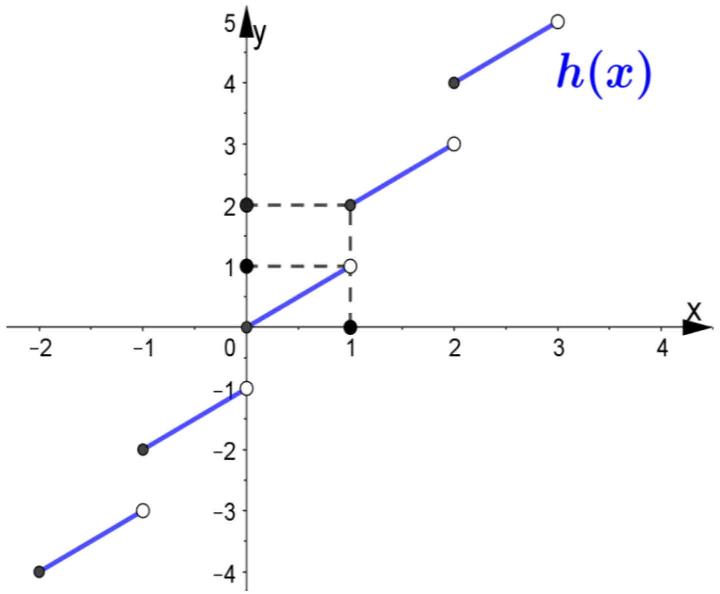
$$g(2) = \_\_\_\_\_$$

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Repaso: función parte entera de x.

Ejemplo 9.

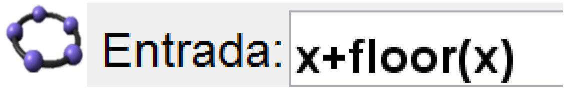
Veamos cual es el comportamiento de la función $h(x) = x + \lfloor x \rfloor$ cerca al punto $x = 1$.



$\lfloor x \rfloor$ es la función "parte entera de x".

x	$h(x)$
0.5	$0.5 + \lfloor 0.5 \rfloor$=0.5
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
0.99	
0.999	

x	$h(x)$
1.5	$1.5 + \lfloor 1.5 \rfloor = 2.5$
1.4	
1.3	
1.2	
1.1	
1.01	
1.001	

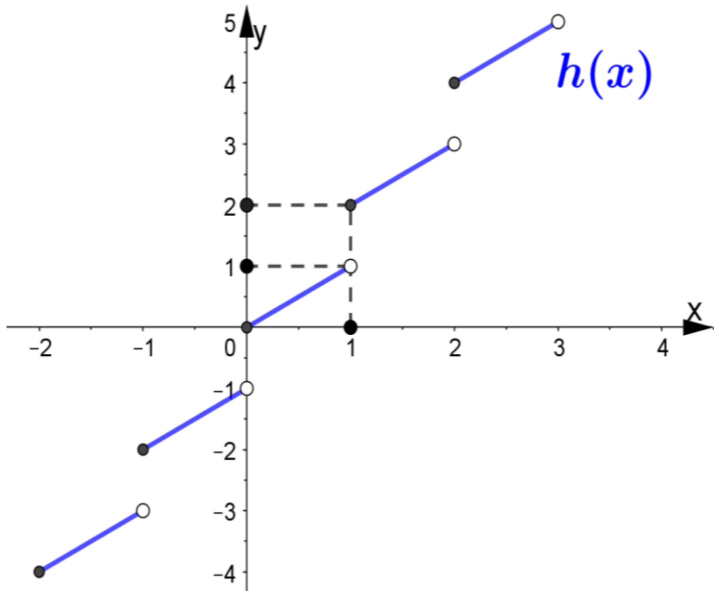


INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Repaso: función parte entera de x.

Ejemplo 9.

Veamos cual es el comportamiento de la función $h(x) = x + \lfloor x \rfloor$ cerca al punto $x = 1$.



$\lfloor x \rfloor$ es la función "parte entera de x".

$\lim_{x \to 1-} h(x) =$ ____

Se lee: Límite cuando x tiende a ____ por la __________ de _____ es igual a ____ por la ______________

$\lim_{x \to 1+} h(x) =$ ____

Se lee: Límite cuando x tiende a ____ por la __________ de _____ es igual a ____ por la ______________

En conclusión:

$\lim_{x \to 1} h(x) =$ ____

Además:

$h(1) =$ _____

Entrada: x+floor(x)

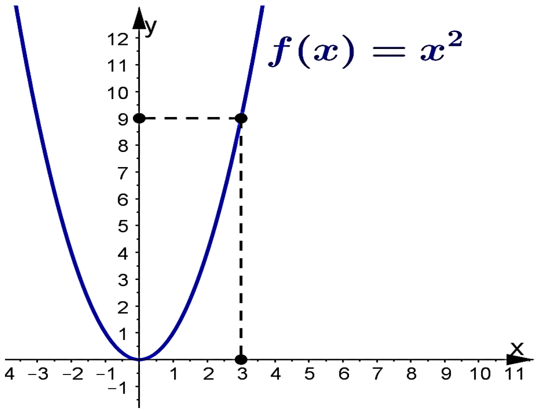
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE
Conclusiones Generales

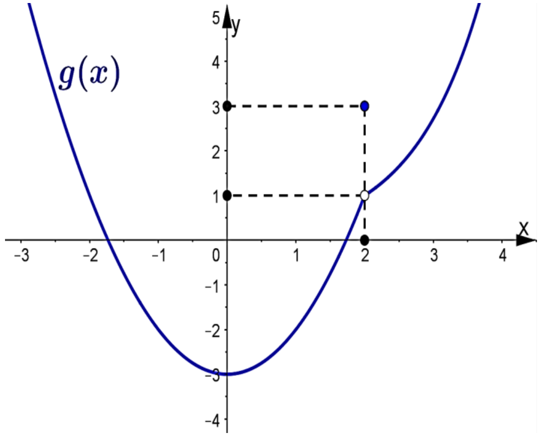
1. Los límites por izquierda $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x)\right)$ y por derecha $\left(\lim\limits_{x \to a+} f(x)\right)$ pueden coincidir o no. (**<u>Límites Unilaterales</u>**).

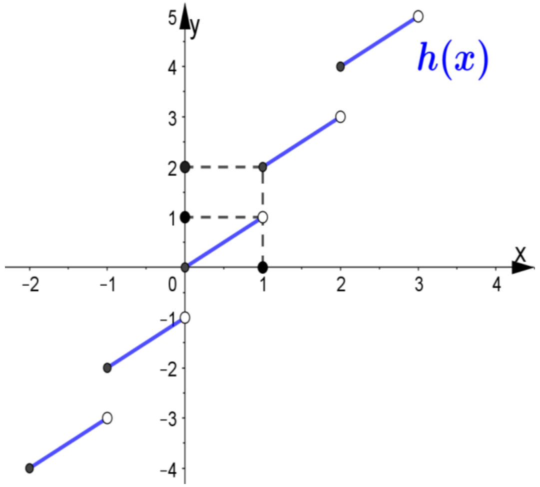
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puede existir o no, cuando existe puede coincidir con $f(a)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ se dice que la gráfica de f es "continua" en $x = a$.

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ existen y son iguales.







INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejercicio 1.

Dadas las 16 gráficas de la guía:

“1.2. Resultados básicos de límites y límites especiales a partir de gráficas”:

a. Realice un análisis del límite en torno a diferentes puntos del dominio de cada función dada, por ejemplo cuando: $x \to 0, x \to -1, x \to \infty, x \to -\infty, x \to \frac{\pi}{2},\ x \to \pi$.
(π, en el caso de las funciones trigonométricas).

b. Mantenga siempre a la mano la tabla de gráficas y la Tabla:
“1.1. Álgebra general de límites”.

c. Use la app de Geogebra en su dispositivo móvil y grafique en ella las funciones de la tabla *1.2.*

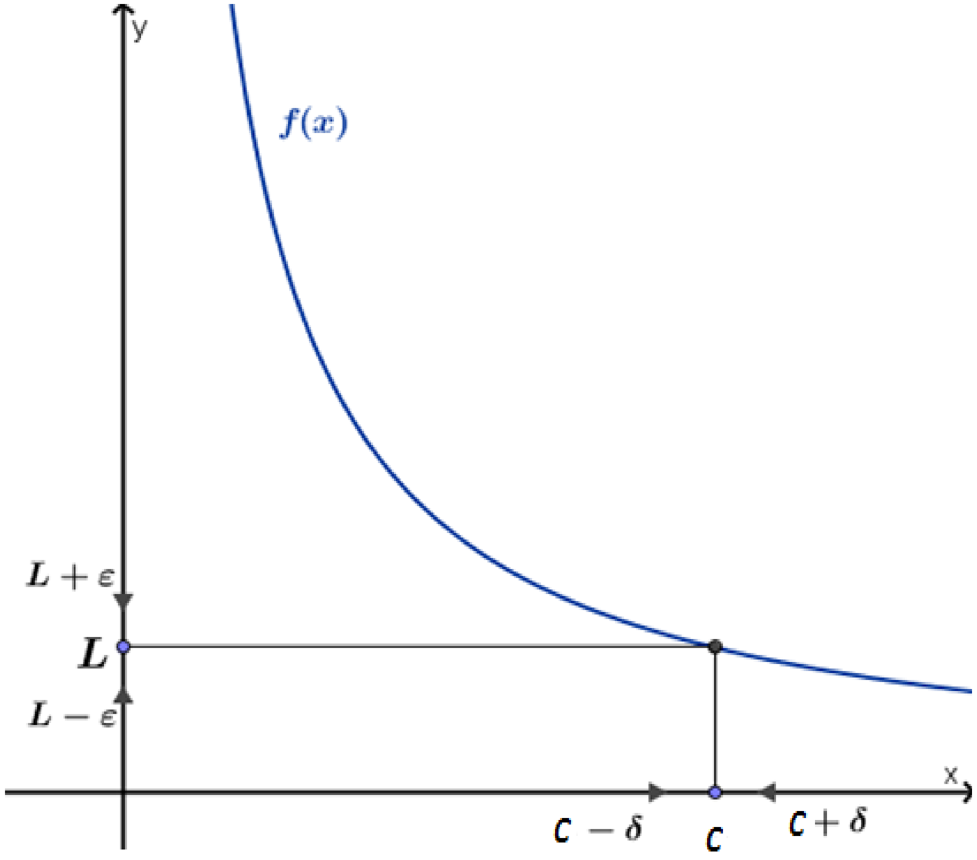
DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo abierto que contiene al punto c. Sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c si:

Dado $\varepsilon > 0$ Podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

En este caso se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



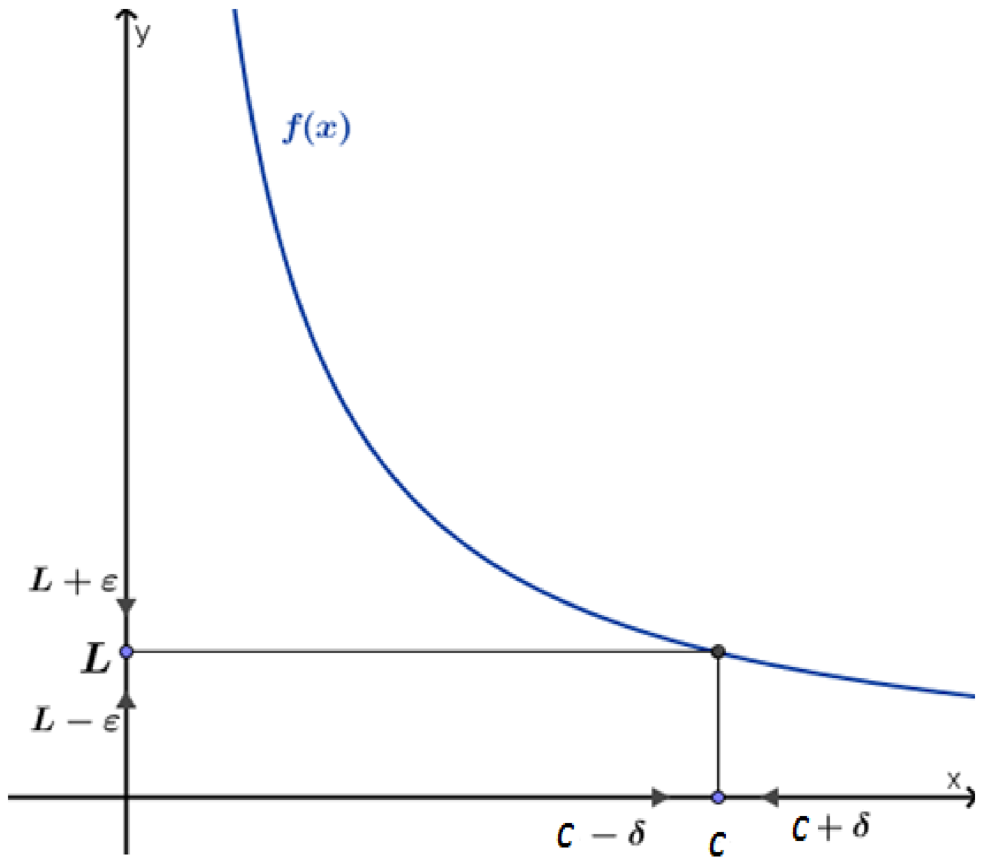
DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

De una manera más intuitiva, se hace referencia a la siguiente definición:

Una función f tiene límite L en un punto a, si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor c.

Lo que se denota como:

$$\lim_{x \to c} f(x) \; = L$$



PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS LÍMITES

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \; y \; \lim\limits_{x\to c} g(x) = M.\;\; L, M \epsilon \mathbb{R}$.. Entonces.

1. $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \pm M$.

2. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x) = LM.$

3. $\lim\limits_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}.\;\; M \neq 0.$

4. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n = L^n.\;\; f(x) > 0.$

5. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{k}L.\;\; k\epsilon\mathbb{R}$

Ejemplo 10.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x^2+3x+2) &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 2 \\
&= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 3\lim_{x\to 2} x + 2 \\
&= (2)^2 + 3(2) + 2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS LÍMITES

Ejemplo 11.

Ejemplo 12.

Ejemplo 13.

Ejemplo 14.

Ejemplo 15.

Ejemplo 16.

Ejemplo 17.

Ejemplo 18.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS LÍMITES

Teorema. Límite de una función radical

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para todo c si n es impar, y para todo $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

Ejemplo 19.

$$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8}$$
$$= -2$$

Ejemplo 20.

$$\lim_{x \to 9} \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{9}$$
$$= 3$$

CASOS CUANDO EL LÍMITE NO EXISTE

Caso 1

Si

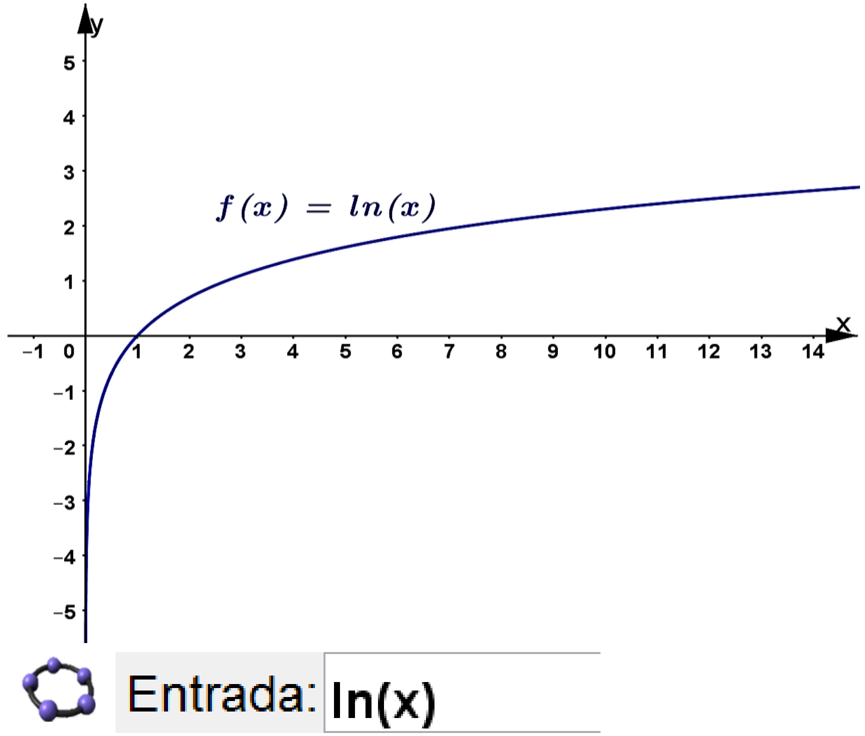
$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

entonces

$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

Ejemplo 21. Considere la función $f(x) = Lnx$.

El $\lim_{x \to 0} Ln(x)$ no existe, ya que: $\lim_{x \to 0+} Lnx = -\infty$



CASOS CUANDO EL LÍMITE NO EXISTE

<u>Caso 2</u>

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe si y solo si

$\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ no existe

O

$\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ no existe,

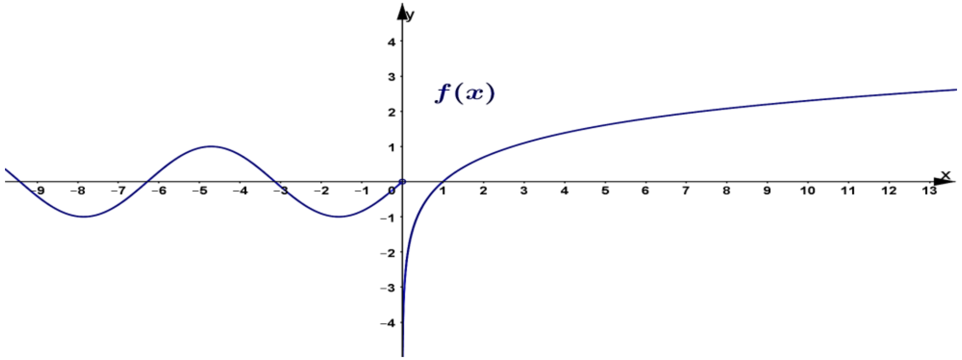
o ambos existen pero son distintos.

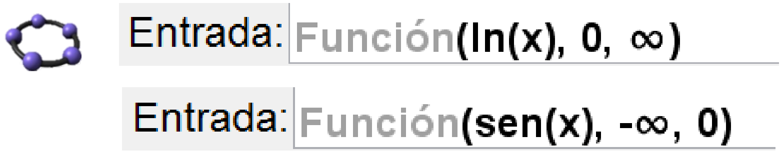
Ejemplo 22.

Considere la función $f(x) = \begin{cases} Lnx; & x > 0 \\ senx; & x < 0 \end{cases}$

El $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, ya que:

$\lim\limits_{x\to 0+} Lnx$ no existe, aunque $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ = 0 (sí existe).





CASOS CUANDO EL LÍMITE NO EXISTE

<u>Caso 3</u>

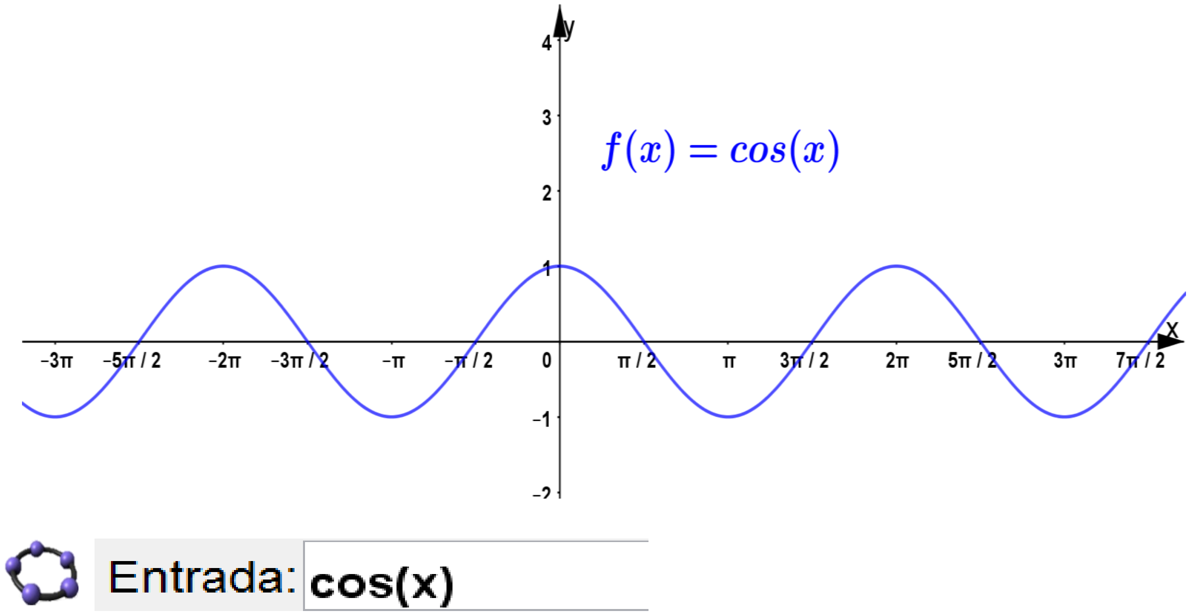
Si $f(x)$ es una función oscilante,

entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

Ejemplo 23.

Considere la función $f(x) = \cos(x)$.

El $\lim_{x \to \infty} f(x)$ no existe, pues la función $\cos(x)$ es una función oscilante.



TEOREMA DEL SÁNDWICH (INTERCALACIÓN O DEL EMPAREDADO)

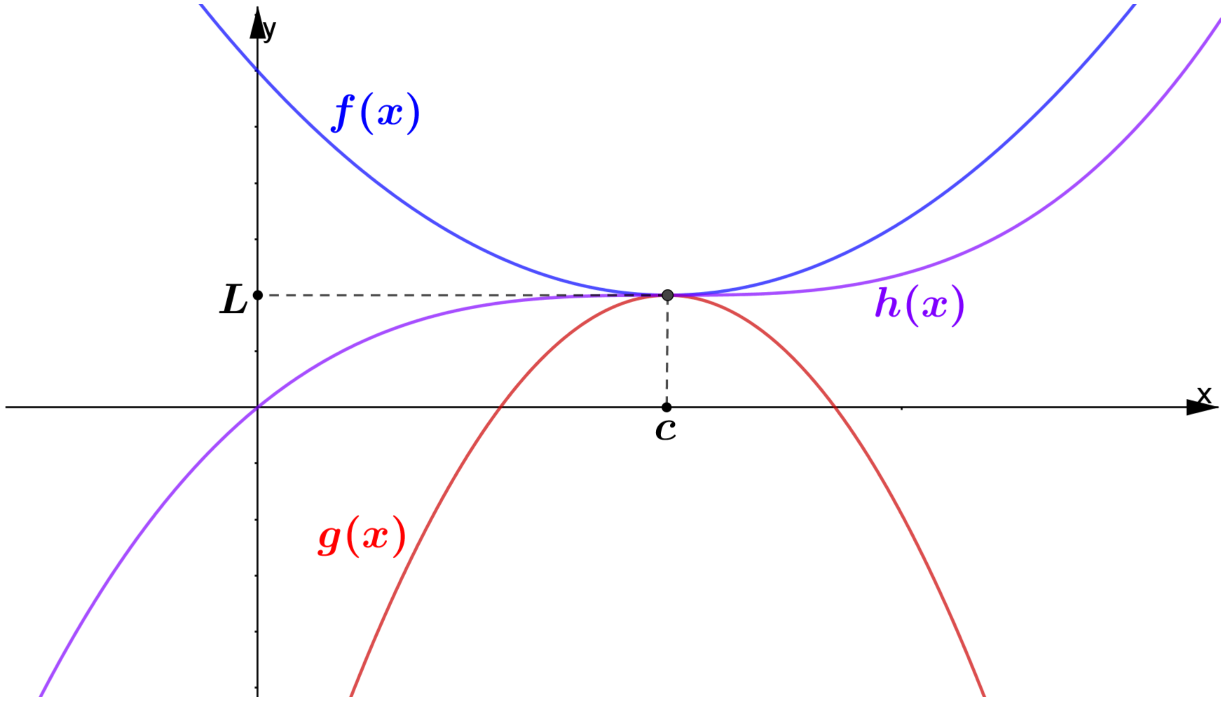
Si $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en el propio c.

Si:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} f(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x \to c} h(x) = L$$



TEOREMA DEL SÁNDWICH (INTERCALACIÓN O DEL EMPAREDADO)

Ejemplo 24.

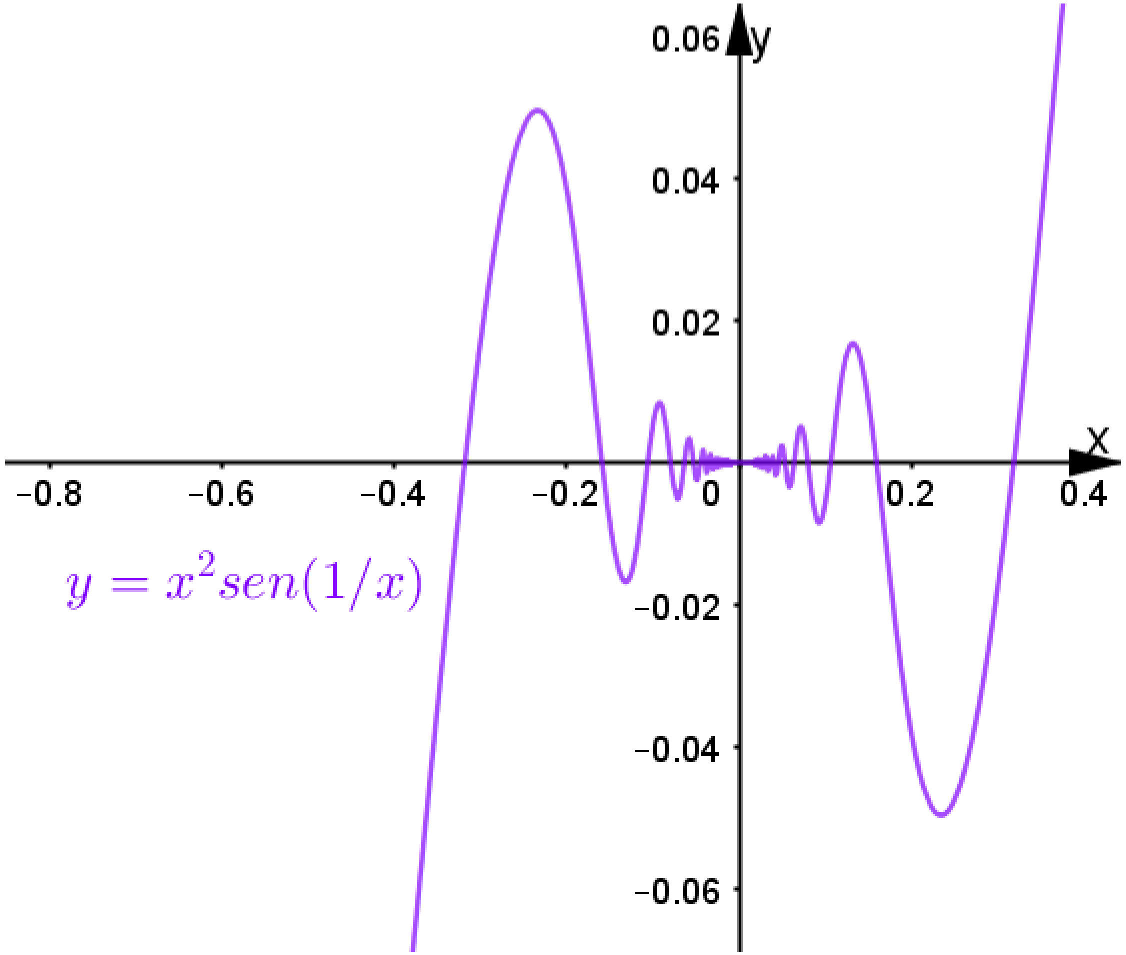
Considere la función$f\ (x) = x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$.
Determine $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Observe que

$$\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0(NE)$$

NE: No existe.

Así que, haciendo uso del Teorema del Emparedado, se tiene:



TEOREMA DEL SÁNDWICH (INTERCALACIÓN O DEL EMPAREDADO)

Ejemplo 24.

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1;$$

$$(x^2)(-1) \leq (x^2)sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq (1)(x^2);$$

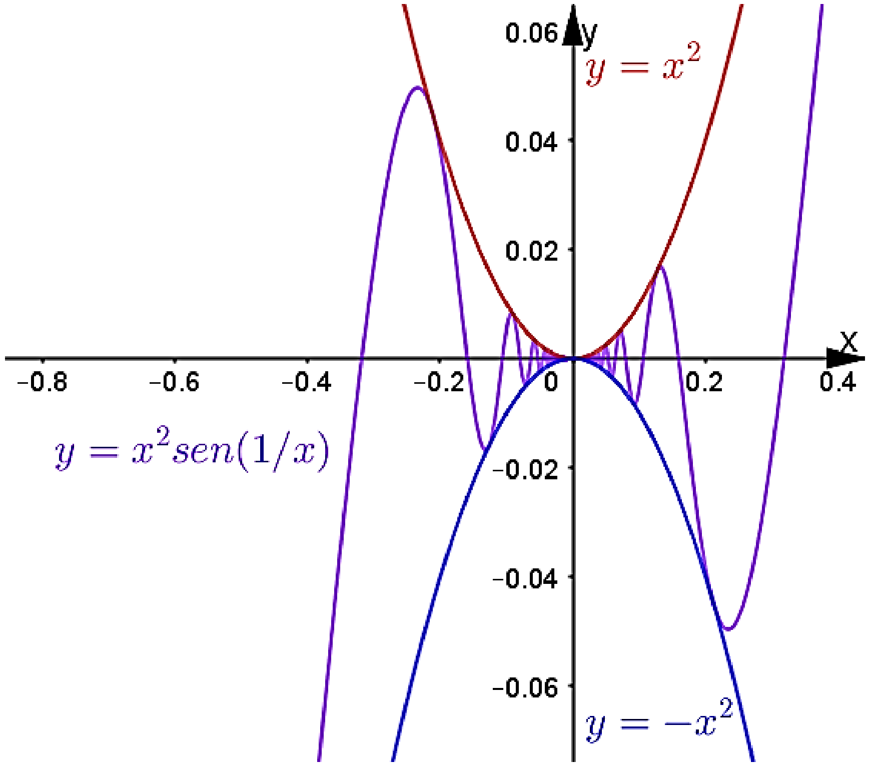
$$-x^2 \leq x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

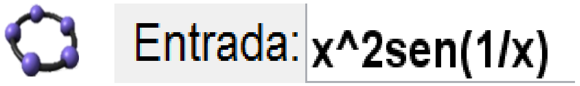
$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \qquad \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$





TEOREMA DEL SÁNDWICH (INTERCALACIÓN O DEL EMPAREDADO)

Ejercicio 2.
Use el Teorema del emparedado para determinar el valor del siguiente límite:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

Ejercicio 3.
Construya tres funciones en las que sea aplicable el Teorema del Emparedado. Explique. (Use Geogebra).

CÁLCULO DE LÍMITES POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Repaso: función compuesta.

Si $\lim_{x \to a} f(g(x))$

Donde

u	$=$	$g(x)$
$x \to a$	$\Rightarrow$	$u \to g(a)$

Entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{u \to g(a)} f(u)$$

Ejemplo 25.

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}} sen(x^2) = \lim_{u \to \pi} sen(u)$$

$$= sen(\pi)$$

$$= 0$$

Sea

$$u = x^2$$

$$x \to \sqrt{\pi} \Rightarrow u \to (\sqrt{\pi})^2$$

$$u \to \pi$$

De ahí que:

CÁLCULO DE LÍMITES POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Ejemplo 26.

Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to 0} Ln\left[sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Solución:

Sea

$$u = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x \to 0 \Rightarrow u \to 0 + \frac{\pi}{2}$$

$$u \to \frac{\pi}{2}$$

De ahí que:

$$\lim_{x\to 0} Ln\left[sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} Ln[sen(u)]$$

Realizamos de nuevo un cambio de variable:

Sea

$$v = sen(u)$$

$$u \to \pi/2 \;\; \Rightarrow \;\; v \to sen(\pi/2)$$

$$v \to 1$$

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{2}} Ln[sen(u)] = \lim_{v\to 1} Ln[v]$$

$$= 0$$

En conclusión:

$$\lim_{x\to 0} Ln\left[sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$$

CÁLCULO DE LÍMITES POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicios 4. Resolver $\lim_{x \to 0} e^{arcsen(1-x)}$

Ejercicios 5. Resolver $\lim_{x \to +\infty} sen(Arctanx)$

Ejercicios 6. Resolver $\lim_{x \to 1} (1 + lnx)^{1/Lnx}$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Recomendaciones:

- Para eliminar la indeterminación 0/0 en un cociente de polinomios en x, se **factorizan** numerador y/o denominador y se eliminan los factores comunes en el límite de la función. (Al aplicar el límite a la función, los factores eliminados son diferentes de cero).

- Para eliminar la indeterminación 0/0 en una función en la que el numerador o el denominador contienen radicales, se **racionaliza** la función y se simplifica el resultado. Una manera de racionalizar es, multiplicar por el conjugado del término irracional.

- Las expresiones irracionales se reducen, en muchos casos a una forma racional introduciendo una nueva variable. (**sustitución**)

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Ejemplo 27.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

$$= 3$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Ejemplo 28.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\;\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Ejemplo 29.

$x - 1 \neq 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y^2} - 1}{y^2 - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y^2 - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(y + 1)}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{1}{y + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Sea

$$x = y^2$$

$$x \to 1 \Rightarrow y \to 1$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Ejercicio 7.

Resolver:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Arcsen(x)}{x}$$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Recomendación:

Para eliminar la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en el límite de una función algebraica racional, se divide entre la variable con la mayor potencia que esté en el numerador y/o denominador, posteriormente se evalúa el resultado.

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 30.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

Ejemplo 31.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x+4}{3x^3-2x-1}$$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Ejercicios 8: Resolver: $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x}{2x^4 + 3}$

Ejercicios 9: Resolver: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

ASTRID ALVAREZ CASTRO-WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Recomendación:

Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_n x^m$ son monomios en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias de x, entonces $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m}$.

ASTRID ALVAREZ CASTRO-WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 32.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x}{5-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x^3$$

$$= -\frac{1}{2}(-\infty)$$

$$= \infty$$

Ejercicio 10.

Resolver:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(3x-1)^2}$$

Ejercicio 11.

Resolver:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5-2x^2+1}{3x^5-5}$$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\infty - \infty$

Recomendaciones:

Para eliminar la indeterminación $\infty - \infty$, se siguen considerando procesos como **factorización, racionalización, sustitución**, así como uso de **propiedades logarítmicas**, entre otros.

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\infty - \infty$

Ejemplo 33.

Resolver:

$$\lim_{x\to\infty}[Log(2x-1)-Log(x)]$$

Recuerde:

$$\log(a\cdot b)=loga+logb$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=loga-logb$$
$$loga^b=b\cdot loga$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}[Log(2x+1)-Log(x)] = \lim_{x\to\infty}Log\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}Log\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

$$= Log(2)$$

FORMAS INDETERMINADAS

Forma $\infty - \infty$

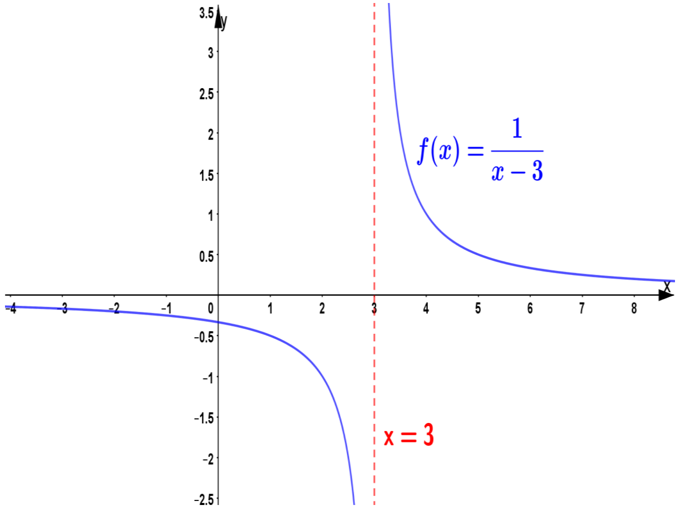
Ejercicio 12. $\lim_{x \to +\infty} [x - Ln(x)]$

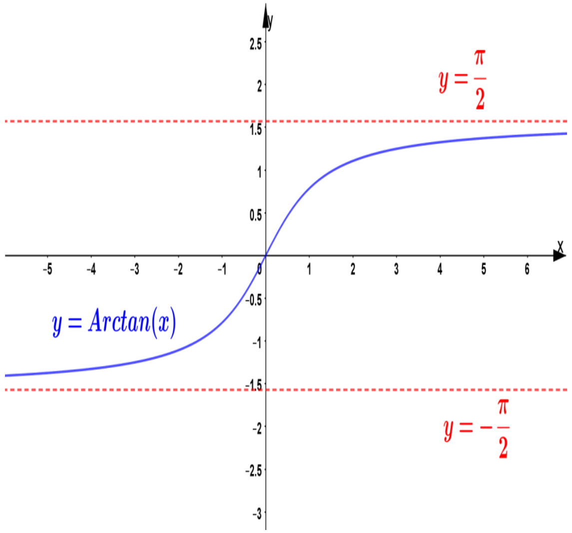
Ejercicio 13. $\lim_{x \to +\infty} (x - 2x^2)$

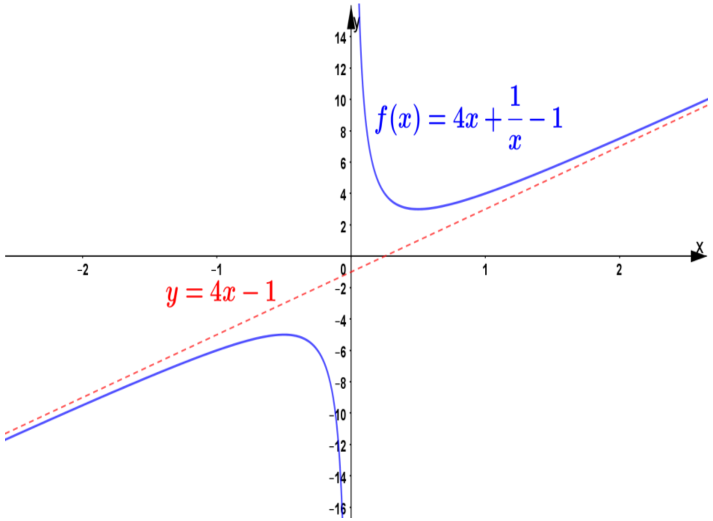
RESUMEN

ASÍNTOTAS

Una asíntota es una recta que se encuentra asociada a la gráfica de algunas curvas y que se comporta como un límite gráfico hacia el cual la gráfica se aproxima indefinidamente, pero "nunca" la toca.







ASÍNTOTAS

Asíntotas verticales

Sea $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, donde $P(a) \neq 0$ y $Q(a) = 0$; la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $R(x)$ si:

$$\lim_{x \to a-} R(x) = \pm\infty$$

o

$$\lim_{x \to a+} R(x) = \pm\infty.$$

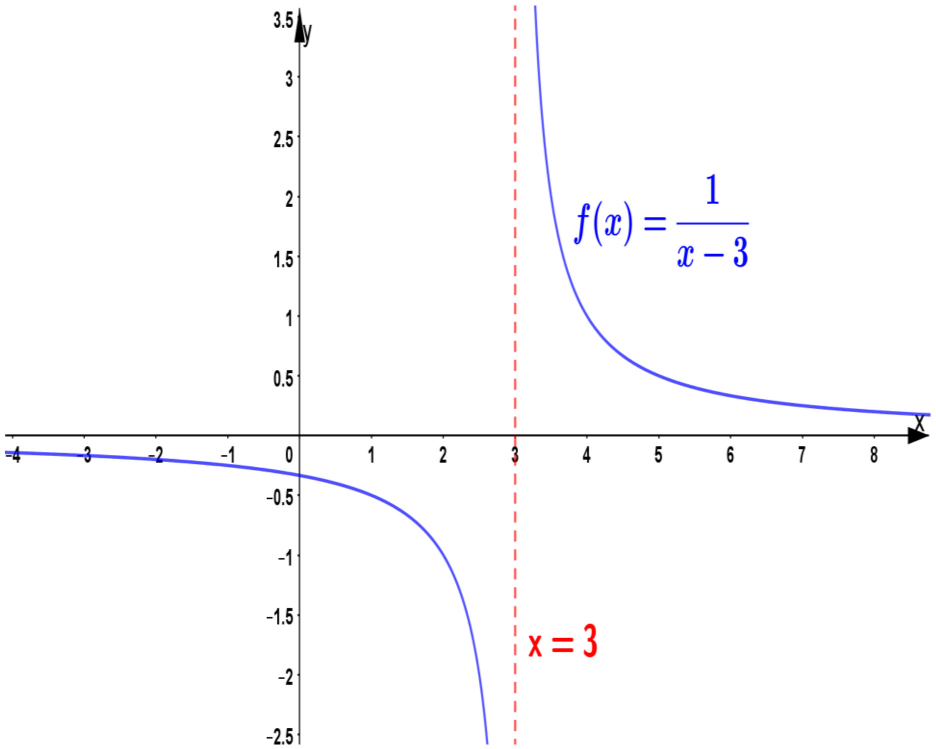
Ejemplo 34.

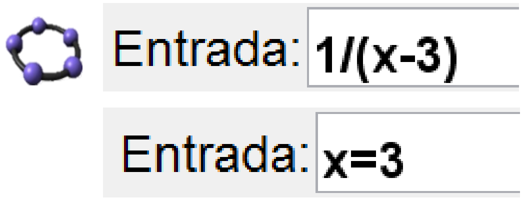
Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Observe que el dominio de la función $f(x)$ es: $\mathbb{R} - \{3\}$).

Como $\lim_{x \to 3-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ y $\lim_{x \to 3+} \frac{1}{x-3} = +\infty$,

entonces la recta $x = 3$ es un asíntota vertical de la gráfica de la función dada.





ASÍNTOTAS

Asíntotas horizontales

Sea la función $y = f(x)$.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

o

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$,

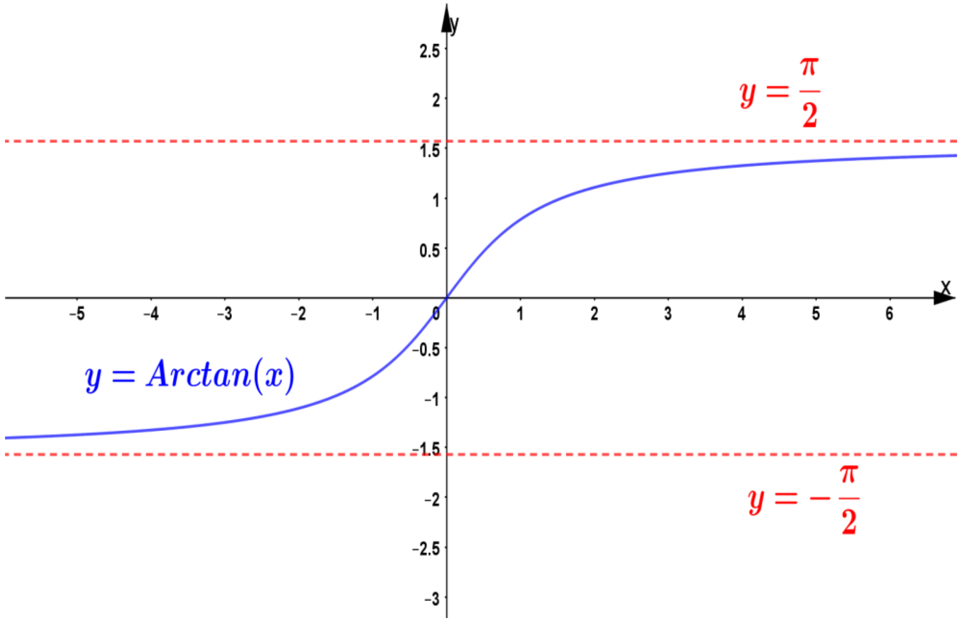
entonces la recta con ecuación $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.

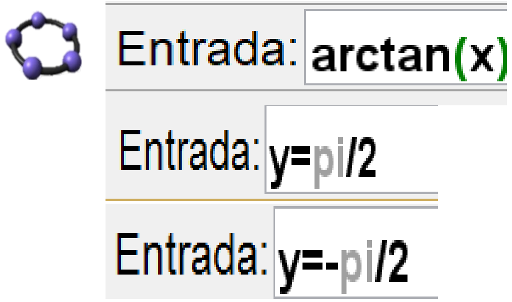
Ejemplo 35.

Sea la función
$f(x) = Arctan(x)$.

Como
$\lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \pi/2$
y
$\lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = -\pi/2$,

entonces la recta $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de la función dada.





ASÍNTOTAS

Asíntotas Oblicuas

Si los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = b,$$

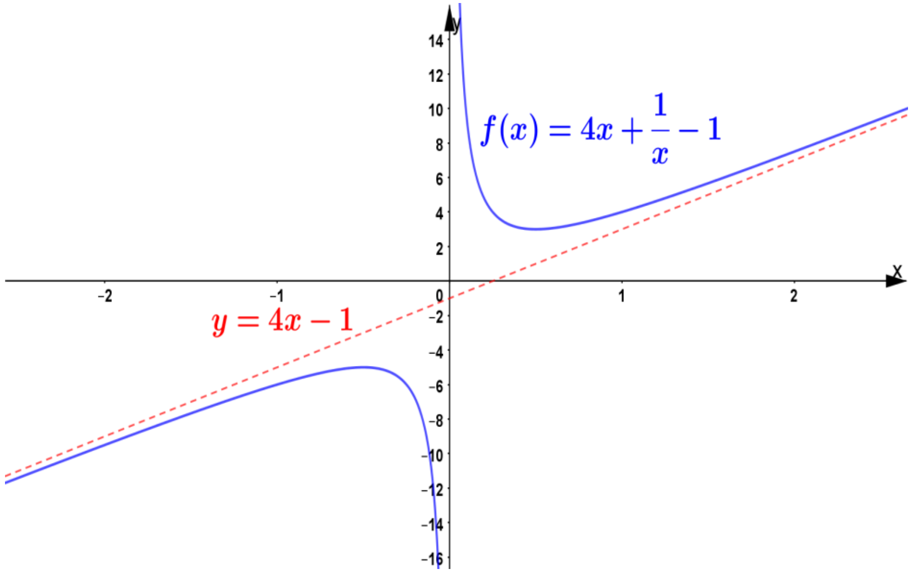
entonces la recta con ecuación $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x)$.

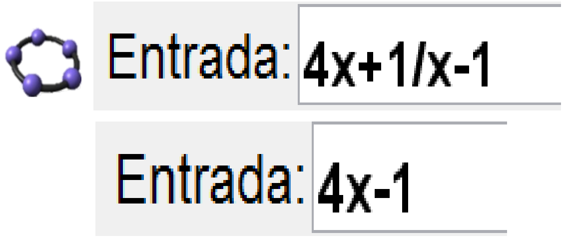
Ejemplo 36.

La función $f(x) = 4x + \frac{1}{x} - 1$ tiene asíntota oblicua $y = 4x - 1$, ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \left(4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \\ &= 4 \\ &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to\infty} \left(4x + \frac{1}{x} - 1 - 4x\right) \\ &= -1 \\ &= b \end{aligned}$$





CONTINUIDAD

Una función es continua en $x = a$ si y solo si satisface las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- $f(a)$ existe.
- $\lim_{x \to a} f(x) \ = f(a)$.

Nota 1: Toda función polinómica es continua en cada número real.

Nota 2: Sea $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, entonces $R(x)$ es continua en cada $a \in \mathbb{R}$, $Q(a) \neq 0$.

Nota 3: Si una función ***no es continua*** en un punto, se denomina ***discontinua*** en dicho punto.

CONTINUIDAD

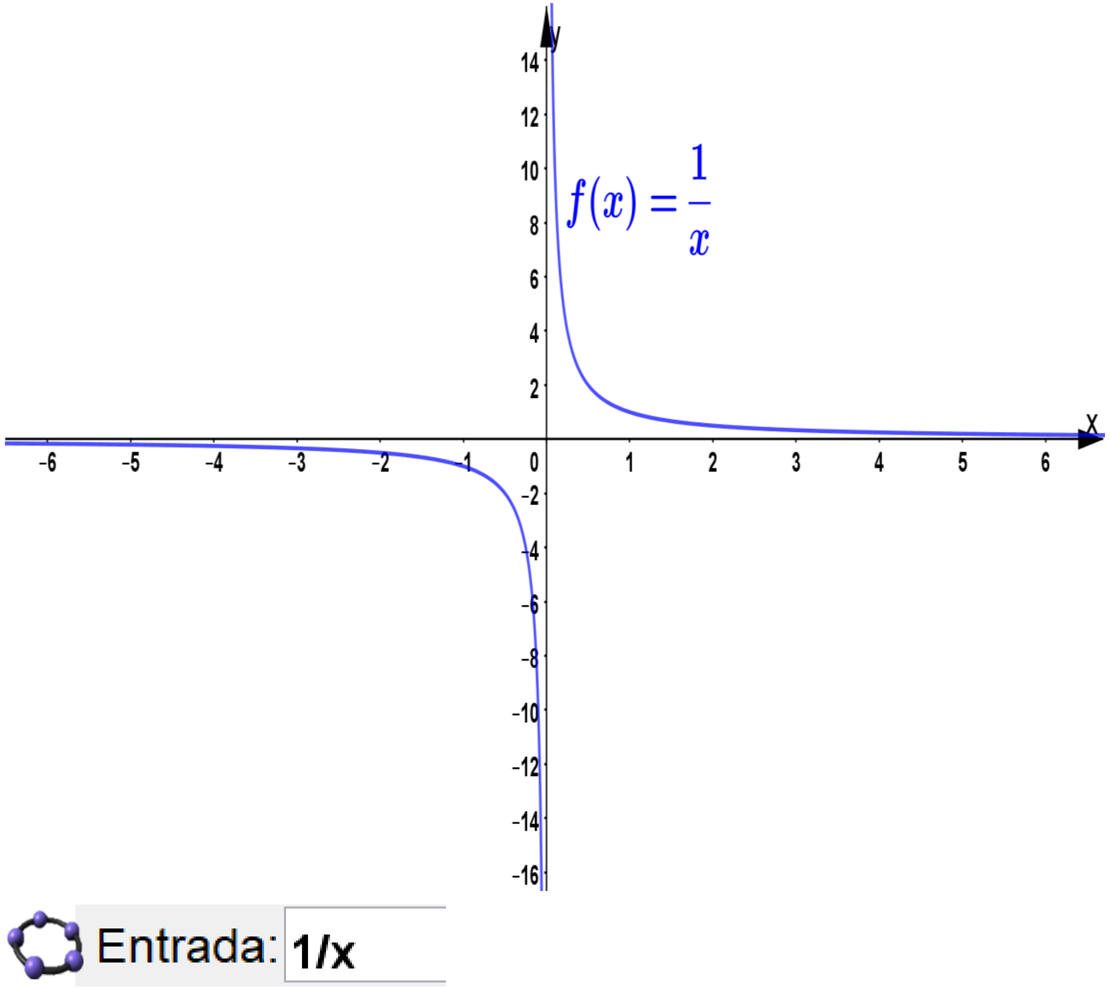
Ejemplo 37.

Sea la función $R(x) = \frac{1}{x}$.

Como $R(x)$ es una función racional, es continua en cada x con $x \neq 0$; o lo que es lo mismo, $R(x)$ es discontinua en $x = 0$.

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ no existe

- $f(0)$ no existe



CONTINUIDAD

Ejercicio 14.

Determine si la función dada es continua en $x = 0$.

$$h(x) = \begin{cases} x+1; & x \leq 0 \\ x^2+1; & x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 15.

Determine si la función dada es continua en $x = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right); & x > 0 \\ x^2; & x \leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16.

Determine si la función dada es continua en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} Ln(x-1); & 1 < x < 2 \\ Arcsen(x-2); & 2 \leq \ x \leq 3 \end{cases}$$

CONTINUIDAD

Algebra de continuidad

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en a, entonces:

1. $f(x) \pm g(x)$ es continua en a.
2. $f(x)g(x)$ es continua en a.
3. $f(x)/g(x)$ es continua en a, $g(a) \neq 0$.
4. $f(x)^{g(x)}$ es continua en a, $f(a) > 0$.

CONTINUIDAD

Algebra de continuidad

Ejemplo 38.

Sea $f(x) = x^2 - \frac{e^x}{x-1}$. ¿Es $f(x)$ continua en $x = 2$?

Observe que:

- x^2 es continua en x=2.
- e^x es continua en x=2.
- $x - 1$ es continua en x=2.

Por tanto, $f(x) = x^2 - \frac{e^x}{x-1}$. es continua en $x = 2$.

CONTINUIDAD

Clases de discontinuidad

Definición: Sea $f(x)$ una función discontinua en a, se dice que $f(x)$ presenta una discontinuidad *removible* o *evitable* en a, si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

Se dice que $f(x)$ presenta una discontinuidad *no removible* o *no evitable* si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

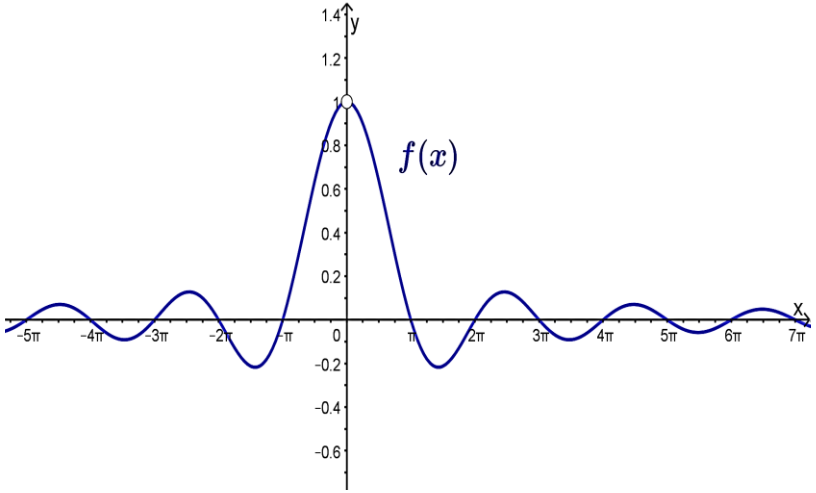
CONTINUIDAD

Clases de discontinuidad

Ejemplo 39.

Sea $f(x) = \frac{senx}{x}$.

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$.



Como $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$, (existe), entonces la discontinuidad de la función dada es ***evitable***.

Redefiniendo la función $f(x)$ se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

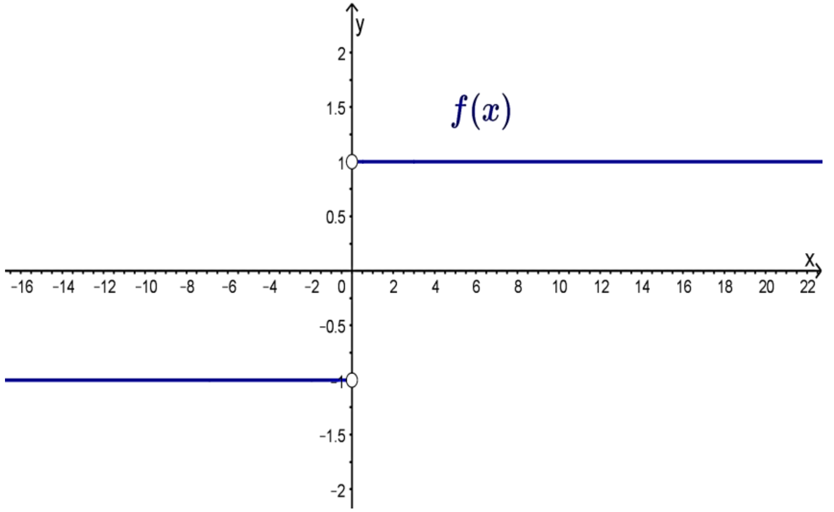
Ahora, $F(x)$ así definida sí es continua en $x = 0$.

CONTINUIDAD

Clases de discontinuidad

Ejemplo 40.

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$



Como $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, entonces la discontinuidad de la función $f(x)$ es **no removible.**

CONTINUIDAD

Continuidad en intervalos

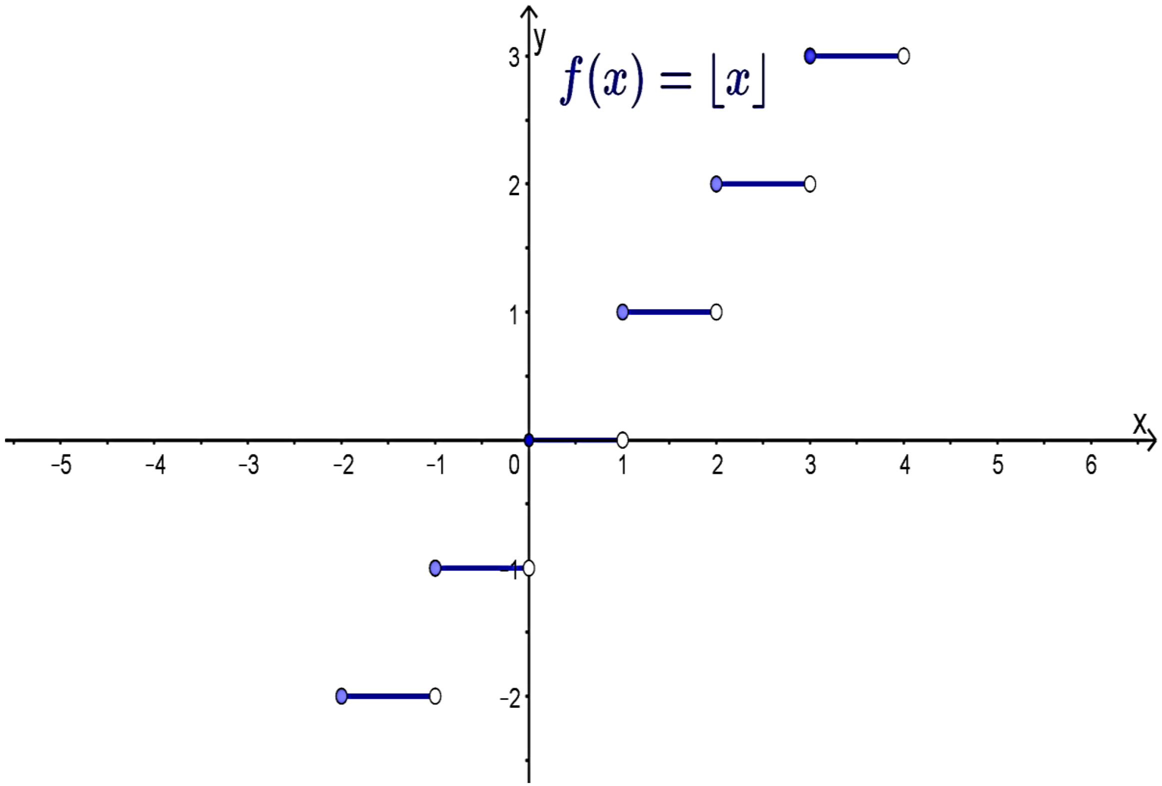
Definición: Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo (a, b) si $f(x)$ es continua en cada punto de (a, b).

Definición: Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) y $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Análogamente se puede definir la continuidad en intervalos semiabiertos.

CONTINUIDAD

Continuidad en intervalos

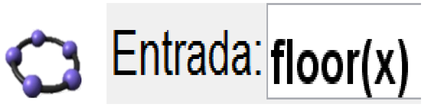


Ejemplo 41.

Sea la función $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
(Función parte entera de *x*).

$g(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua en los intervalos:

$g(x) = \lfloor x \rfloor$ es discontinua en los intervalos:

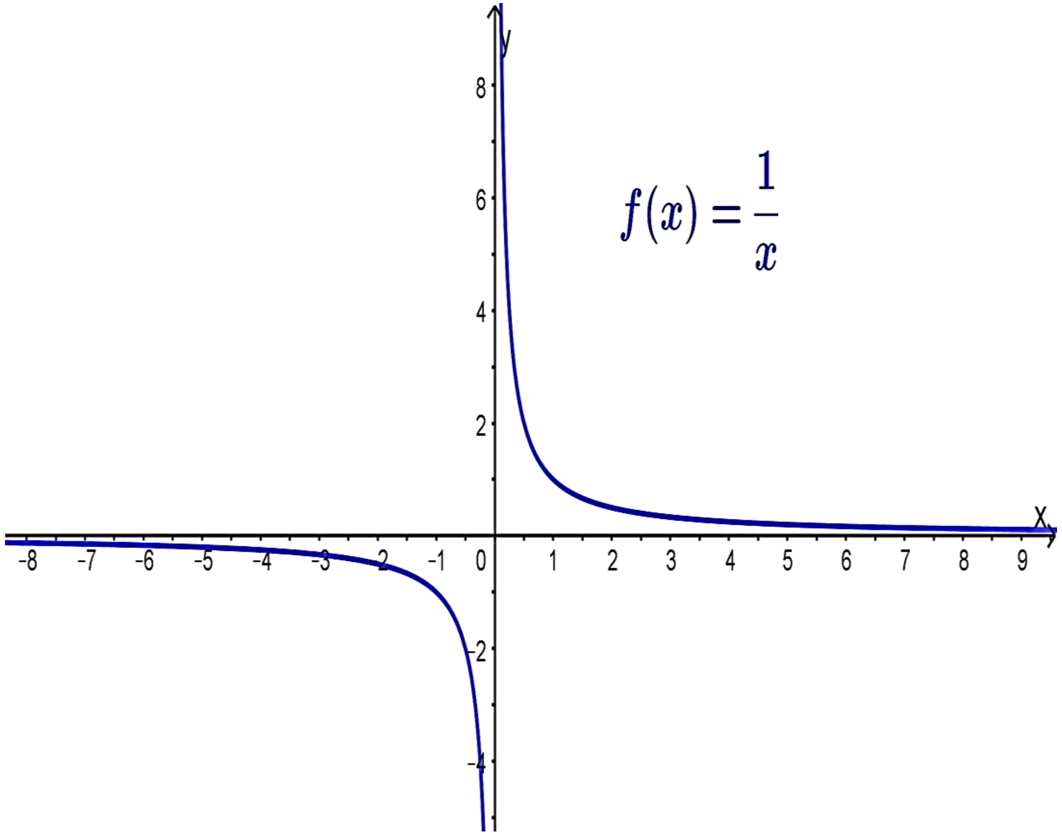


CONTINUIDAD

Continuidad en intervalos

Ejemplo 42.

$\mathrm{h}(x) = \frac{1}{x}$ es continua en los intervalos:



$\mathrm{h}(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en los intervalos:

CONTINUIDAD

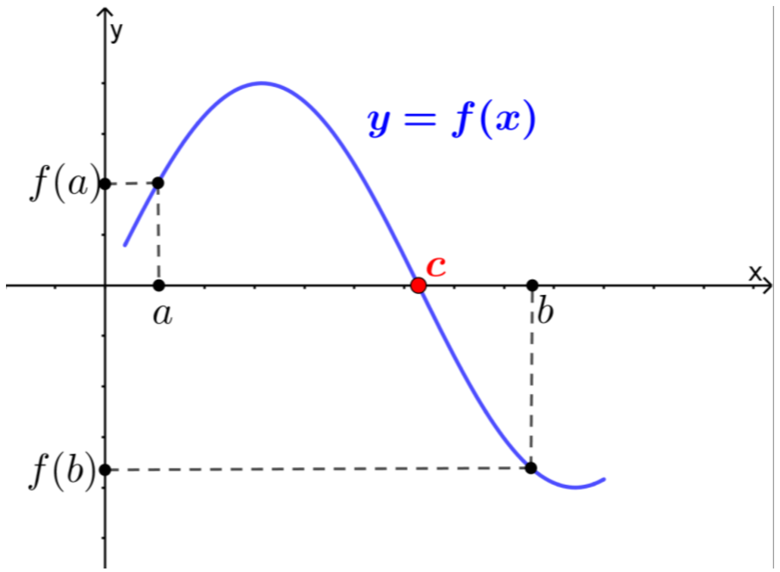
Teorema de Bolzano

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, si se cumple que:

$[f(a)>0$ y $f(b)<0]$ ó $[f(a)<0$ y $f(b)>0]$.

Entonces,

existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.



Ejemplo 43.

Sea $f(x) = x^2 + 3x - 4.$ Verificar el Teorema de Bolzano en el intervalo [0,2].

- Dado que $f(x)$ es una función polinómica, entonces es continua en todo $\mathbb{R}$, particularmente en el intervalo dado.
- A continuación, se determinan las imágenes de la función en los extremos del intervalo, para verificar el signo de dichos valores, es decir:

$$f(0) = -4 < 0$$

$$f(2) = 6 > 0$$

Luego, se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano, por tanto, existe $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0.$
Encontremos entonces el valor o valores de "c":

CONTINUIDAD

Teorema de Bolzano

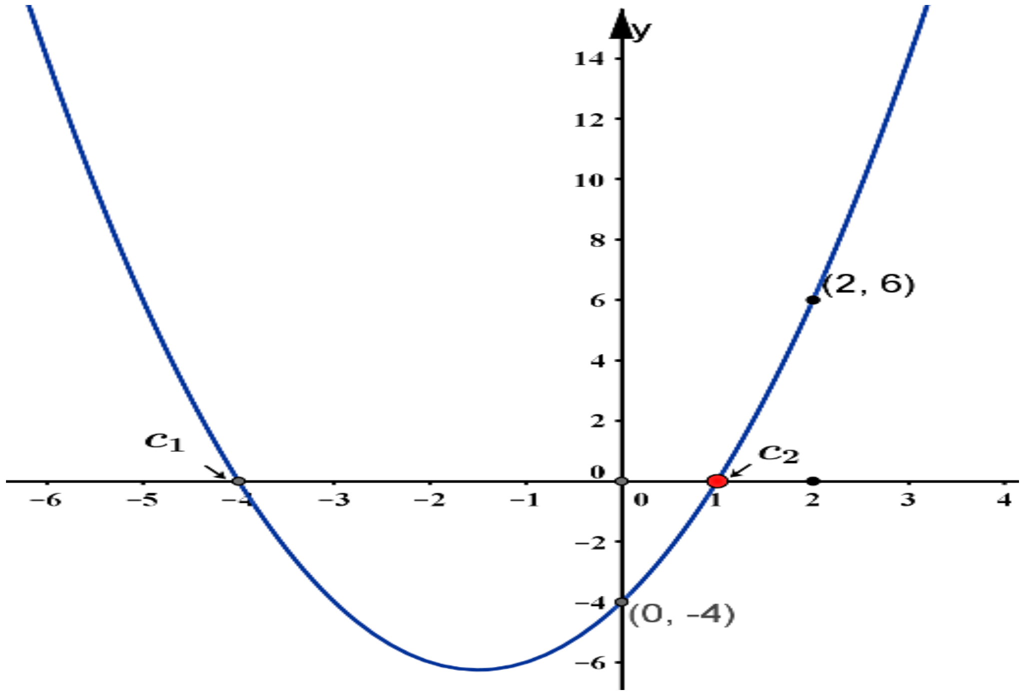
Ejemplo 43.

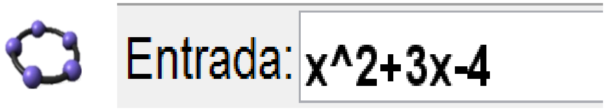
Sea $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Verificar el Teorema de Bolzano en el intervalo [0,2].

$$f(c) = c^2 + 3c - 4 = 0.$$

De ahí que $c_1 = -4$ y $c_2 = 1$

Como $1 \in (0,2)$, entonces $c_2 = 1$ es el valor que buscábamos.





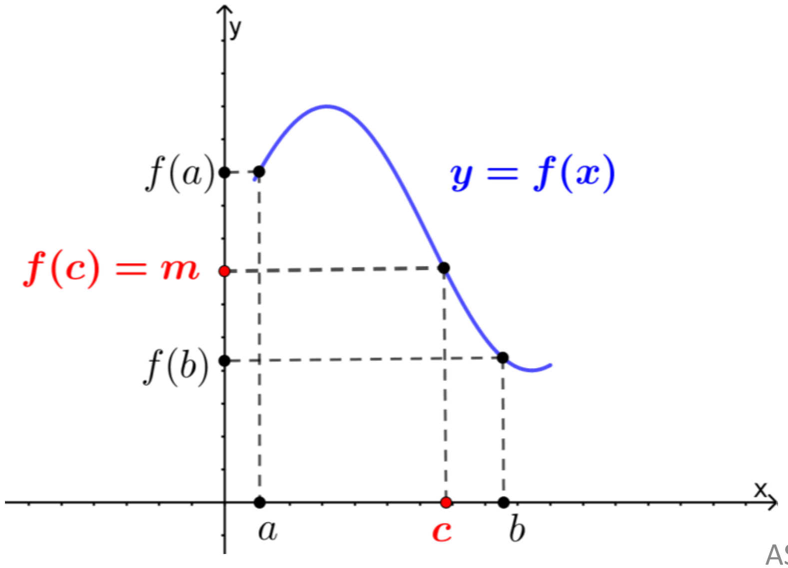
CONTINUIDAD

Teorema del valor medio

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, sea m un valor medio entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir:

$[f(a)<m<f(b)]$ ó $[f(b)<m<f(a)]$.

Entonces,
existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=m$.



Ejemplo 44.

Sea $f(x) = x^2 + 1$. Use el Teorema del Valor Intermedio para probar que existe $c \in [0,2]$ tal que $f(c)=2$.

- Dado que $f(x)$ es una función polinómica, entonces es continua en todo $\mathbb{R}$, particularmente en el intervalo dado.
- Se determinan las imágenes de la función en los extremos del intervalo [0,2], es decir:

$$f(0)=1$$
$$f(2)=5$$

Se verifica que:

$$1 < f(c) < 5$$
$$1 < 2 < 5$$

CONTINUIDAD

Teorema del valor medio

Ejemplo 44.

Como:

$$1 < f(c) < 5$$
$$1 < 2 < 5$$

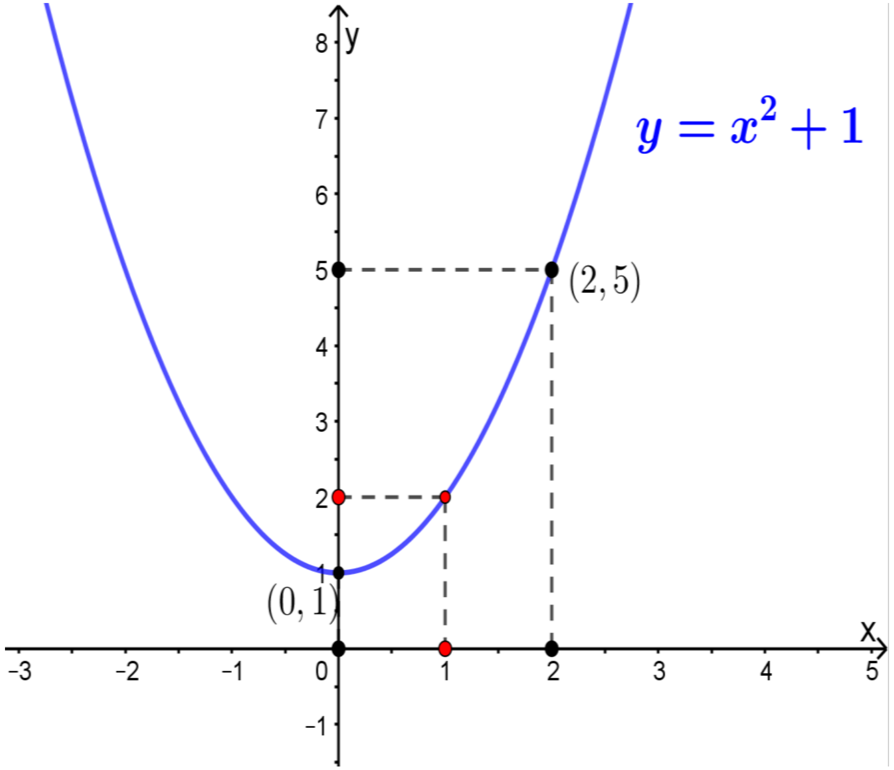
Luego, se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio, por tanto, existe $c \in [0,2]$ tal que $f(c)$=2.

Encontremos entonces el valor o valores de "c“, tal que $f(c)$ =2:

$$f(c) = c^2 + 1 = 2$$

De ahí que $c = \pm 1$.

Como 1∈(0,2), entonces $c = 1$ es el valor buscado.



FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 17.

Si la temperatura del aire es $T(ºF)$ y la velocidad del viento es $v(mph)$, entonces la temperatura combinada $W(v)$ equivalente está dada por la función:

$$W(v) = \begin{cases} T & 0 \leq v \leq 4 \\ 91{,}4 + (91{,}4 - T)(0{,}0203v - 0{,}304\sqrt{v} - 0{,}474) & 4 < v < 45 \\ 1{,}6T - 55 & v \geq 45 \end{cases}$$

a. Si $T = 30ºF$, cuál es la temperatura combinada cuando $v = 20mph$?

b. Si $T = 30ºF$, cuál es la temperatura combinada cuando $v = 50mph$?

c. ¿Es la función combinada $W(v)$ continua en $v = 4$?

d. ¿Es la función combinada $W(v)$ continua en $v = 45$?

e. ¿Qué condición debe cumplir la función para ser continua en el intervalo $[0{,}45)$?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 18.

Un estudio ambiental de cierta comunidad indica que el nivel medio diario de smog en el aire será $Q(p) = \sqrt{0{,}5p + 19{,}4}$ unidades cuando la población es p miles. Se estima que dentro de t años, la población será $p(t) = 8 + 0{,}2t^2$ miles.

a. Exprese el nivel de smog en el aire como una función del tiempo.
b. Cuál será el nivel de smog dentro de tres años? (Expréselo como un límite).
c. Cuándo llegará a 5 unidades el nivel de smog ?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 19.

La población (en miles) de una colonia de bacterias, t minutos después de introducir una toxina, está dada por la función:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + t; & t < 5.1 \\ -8t + 72; & t \geq 5.1 \end{cases}$$

a. ¿Cuándo morirá la colonia?
b. Explique por qué la población debe ser 10.000 en algún momento entre $t = 1$ y $t = 4$.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 20.

El radio de la Tierra es aproximadamente 4.000 millas, y un objeto a x millas del centro de la Tierra pesa $w(x)$ libras, donde:

$$w(v) = \begin{cases} Ax & 0 < x \leq 4000 \\ \dfrac{B}{x^2} & x > 4000 \end{cases}$$

Si A y B son constantes positivas y si $w(x)$ es continua en todo x. ¿Cuál es la relación entre A y B ?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 21.

Según cierta teoría médica el peligro $P(t)$ de un virus se mide en función del tiempo t que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{50t - 62{,}5}{0{,}5t + 5} & t > 5 \end{cases}$$

a. ¿Es continua la función $P(t)$ en todo su dominio?
b. ¿Puede superar el virus una peligrosidad de 95 unidades, por mucho tiempo que lleve en el organismo?
c. Dibuje la gráfica de $P(t)$.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 22.

Cada mes, una empresa decide el gasto en publicidad en base a los beneficios que espera obtener dicho mes. Para ello usa la siguiente función, donde G es el gasto en publicidad (en cientos de euros) y "x" los beneficios esperados (en miles de euros).

$$G(x) = \begin{cases} 6 + 2x - \frac{x^2}{6}; & 0 \leq x \leq 9 \\ 3 + \frac{75x+5400}{10x^2}; & x > 9 \end{cases}$$

a. ¿Es el gasto en publicidad una función continua del beneficio?
b. ¿Cuánto se invertirá en publicidad cuando los beneficios sean de 9000€?
c. Por muchos beneficios que espere, ¿el gasto llegará a ser inferior a 400€?
d. Haga un esbozo de la gráfica de la función.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 23.

Un inversor utiliza la siguiente función para invertir en Bolsa parte del capital que obtiene mensualmente. $R(x)$ representa la cantidad reinvertida cuando el capital obtenido es x (tanto la cantidad como el capital en euros):

$$\mathrm{R}(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x < 600 \\ 40 + \frac{400+56x}{1640+0.1x}; & x \geq 600 \end{cases}$$

a. ¿Es la cantidad invertida una función continua del capital obtenido?
b. ¿Si la función es creciente en todo su dominio, por muy grande que sea el capital obtenido ¿puede la cantidad reinvertida superar los 1000€?
c. Haga una representación gráfica de la función.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 24.

La población de cierta ciudad se pronostica que será t años a partir de ahora: $P(t) = 20000 + \frac{10000}{(t+20)^2}$

Determine la población a largo plazo.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 25.

Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en un período dado es: $h(x) = \frac{900x}{10+45x}$

Si la densidad de huésped estuviese aumentando sin cota. ¿A qué valor se aproxima $h(x)$?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 26.

Según la gráfica de la función: $\mathrm{I}(x) = \begin{cases} -100x + 600; & 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100; & 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600; & 10 \leq x < 15 \end{cases}$

Qué describe el inventario I de una compañía en el instante x. ¿I es continua en 3?, ¿I es continua en 10?, ¿I es continua en 12?

Ejercicio 27.

Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de cada uno es: $p(q) = 20 - 0.1q$ dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para obtener el máximo ingreso?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 28.

Para una relación presa-depredador, se determinó que el número de presas consumidas por un depredador (y) a lo largo de un período fue una función de la densidad de presas dp (número de presas por unidad de área). Suponga que: $y(dp) = \frac{10dp}{1+0.1dp}$. Si la densidad de las presas aumenta sin cota, ¿A qué valor se aproxima el número de presas consumidas por el depredador?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 29.

La cantidad de un medicamento en la corriente sanguínea t horas después de inyectada en un paciente está dada por la función: $m(t) = \frac{10t}{1+t^2}$.

a. ¿Cuál es la mayor cantidad de medicamento en sangre?
b. ¿En qué momento está la mayor cantidad de medicamento?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 30.

En un experimento, se determina que la población de una colonia de bacterias (en millones) después de t días está dada por: $P(t) = \frac{4}{2+8e^{-2x}}$.

a. ¿Cuál es la población inicial de la colonia de bacterias?

b. A medida que pasa el tiempo ¿La población tiende a estabilizarse o aumenta indefinidamente?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 31.

Un cultivo de bacterias crece según la expresión: $\mathrm{y}(t) = \frac{1.25}{1+0.25e^{-0,4t}}$. Donde el tiempo t se mide en horas y el peso del cultivo en gramos.

a. ¿Cuál es el peso del cultivo después de 20 minutos?
b. ¿Cuál será el peso del cultivo cuando el número de horas crece indefinidamente?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 32.

La expresión: $\mathrm{y}(t) = 120 - 80e^{-0.3t}$ es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora para un empleado de una línea de montaje de acuerdo al número de horas de experiencia t que tiene en su trabajo.

a. ¿Cuál es el número de unidades que puede terminar un empleado en el momento que ingresa a una empresa y en su segunda hora de experiencia?
b. ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado cuando el número de horas de experiencia en la fábrica crece indefinidamente?

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 33.

El tejido vivo solo puede ser estimulado por una corriente eléctrica si ésta alcanza o excede cierto valor que se designa como v. Este valor v depende de la duración t de la corriente. Si a y b son constantes positivas, la Ley de Weiss establece que: $v(\mathrm{t}) = \frac{a}{t} + b$. Analice el comportamiento de v cuando.

a. t se aproxima a cero.

b. t tiende a infinito.

FUNCIONES Y LÍMITES EN CONTEXTO

Ejercicio 34.

El área de un terreno rectangular está dado por la función: $A(l) = \frac{\sqrt{l^2+9}-3}{l^2}$. Donde l es una de las dimensiones del terreno expresado en metros. ¿A qué valor se aproxima el terreno cuando l se aproxima a cero metros?

MODELOS FUNCIONALES

CON INSTRUCCIONES EN GEOGEBRA

A continuación se presentan ejemplos con pautas básicas para construir un modelo funcional, a través de ejercicios propuestos, e instrucciones en Geogebra.

Las herramientas como la validación y confiabilidad entre otros, quedarán para un curso posterior.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 45.

Los siguientes datos corresponden a la edad E en millones de años de rocas presentes en una excavación. La variable independiente x corresponde a la profundidad de la que se extrajo la roca.

x (m)	5	10	15	20	25
Edad (mil. Años)	20	40	60	80	100

El problema a resolver es:

Determinar si existe un modelo funcional entre la *Edad de las rocas* y *la profundidad de excavación*.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 45.

La forma de representar los puntos en *Geogebra* es como se indica a continuación:

Entrada: (5,20)

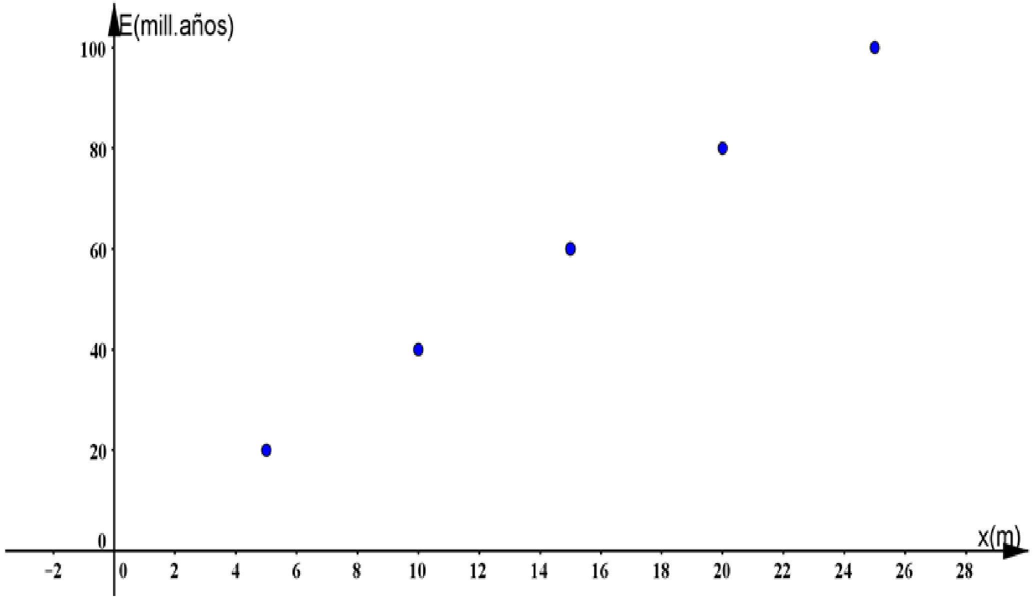
(Esta instrucción se usa para cada uno de los puntos dados).

Cada uno de los puntos quedan denominados con letras del alfabeto en mayúscula.

Vista Algebraica

- A = (5, 20)
- B = (10, 40)
- C = (15, 60)
- D = (20, 80)
- E = (25, 100)

La representación gráfica de los datos obtenidos se observa en la siguiente figura.

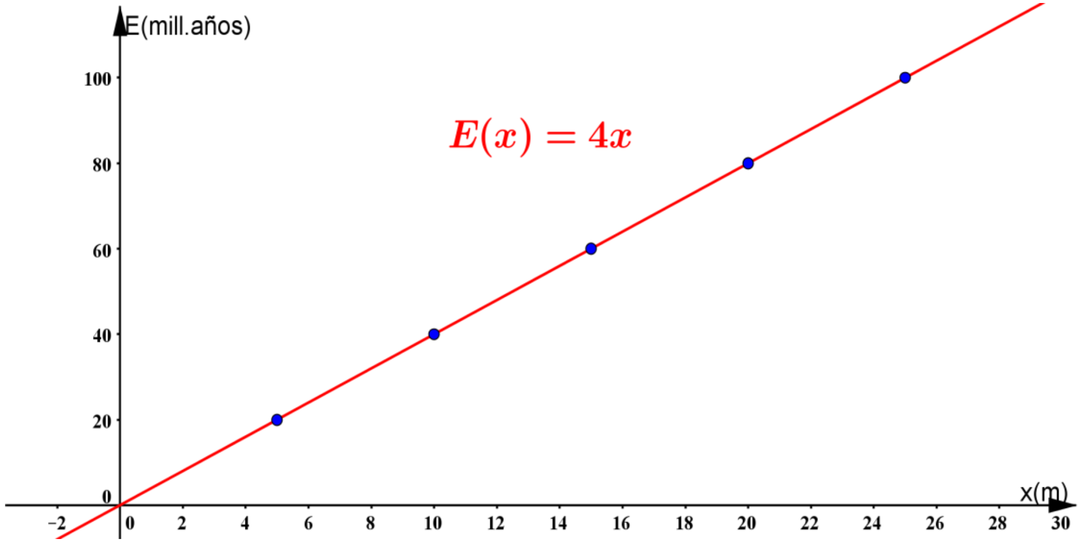


Profundidad de excavación (x) vs Edad de las rocas (E)

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 45.

La representación gráfica de los datos obtenidos se observa en la siguiente figura.



Profundidad de excavación (*x*) vs Edad de las rocas (*E*)

En este caso es claro que los datos graficados, presentan un comportamiento lineal.

Determinemos la ecuación de esta función lineal. Para ello, se eligen dos puntos de la recta buscada. Elijamos, por ejemplo, los puntos (10, 40) y (25, 100).

De donde se obtiene la ecuación de la recta:

$$\boldsymbol{y = 4x}$$

Se escribe en el Campo de Entrada la instrucción *AjusteLineal*:

AjusteLineal({A, B, C, D, E})

Con lo que se obtiene:

$$\boldsymbol{y = 4x}$$

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 46.

En un estudio sobre un tipo especial de langosta (Homarus gammarus), se establecieron tres variables de interés:

t: Temperatura del medio ambiente (medida en °C).
R: Razón de consumo de oxígeno (medida en ml/h).
C: Concentración de oxígeno (medida en ml/L).

Para graficar situaciones en dos variables, se debe fijar (dejar constante) una de ellas. En este caso, se hizo el estudio a una temperatura ambiental (controlada) de 15°C.

Luego, la temperatura, al ser constante, deja de ser una variable.

Con esta información el problema a resolver es:

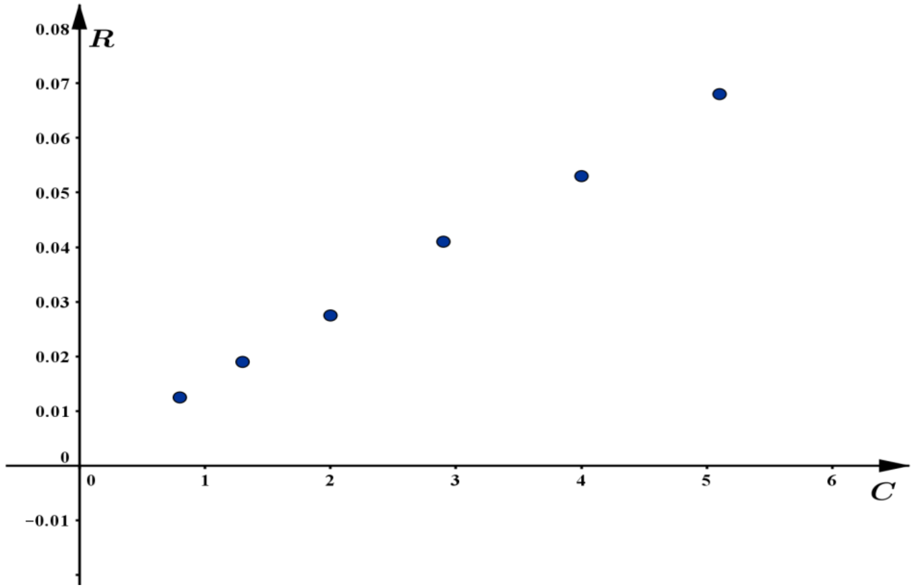
Determinar si existe un modelo funcional entre la _razón de consumo de oxígeno_ y la _concentración de oxígeno_ de la langosta.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 46.

Se midieron algunos valores de las variables R (*razón de consumo de oxígeno*) y C (*concentración de oxígeno*). Los datos obtenidos, vienen dados en la siguiente tabla y se representan en la figura:

$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{C}$
0.0125	0.8
0.0190	1.3
0.0275	2.0
0.0410	2.9
0.0530	4.0
0.0680	5.1



Coordenadas de puntos de concentración de oxígeno vs razón de consumo de oxígeno de la langosta.

MODELOS FUNCIONALES

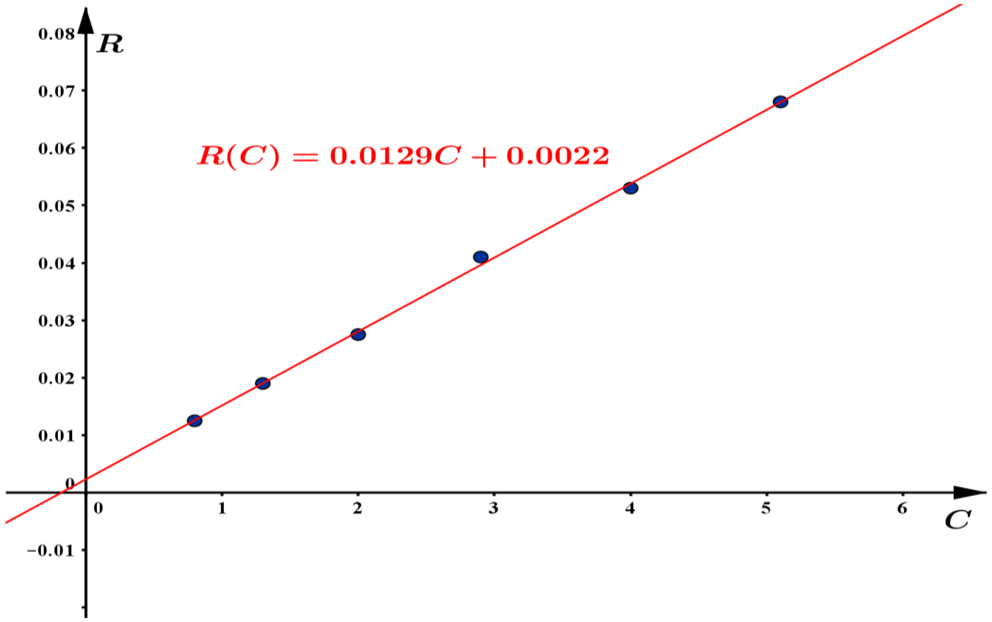
Ejemplo 46.

En este caso es claro que los datos graficados, presentan un comportamiento lineal. Determinemos la ecuación de esta función lineal.

Para ello, se eligen dos puntos de la recta buscada.
Elijamos, por ejemplo, los puntos (1.3, 0.019) y (5.1, 0.0680).

De donde se obtiene la ecuación de la recta $R(C)$:

$$\boldsymbol{R(C) = 0.0129C + 0.0022}$$



Representación gráfica de la recta que modela la concentración y la razón de consumo de oxígeno de la langosta.

Se escribe en el Campo de Entrada la instrucción

AjusteLineal, tal como se indicó en el ejemplo anterior.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

Al lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba, se mide la altura del proyectil (d, en metros) en diferentes instantes (t, en segundos) después de lanzado, obteniendo la siguiente tabla de valores:

t	0	1	3	5	7	8.4	10
d	4	6	8	9	8	6	3

a. Graficar los datos de la tabla de valores dada.

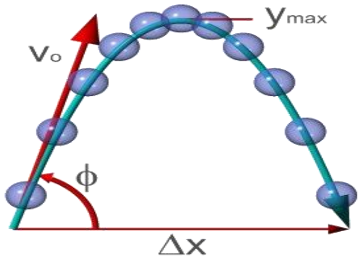
b. Con respecto a la distribución de puntos obtenidos, ¿qué tipo de función podría modelar razonablemente la situación planteada? Obtener una expresión de la función propuesta.

c. Graficar la función encontrada.

d. A qué altura se encuentra el proyectil a los 9 segundos de ser lanzado?

e. ¿En qué momento el proyectil vuelve al suelo?

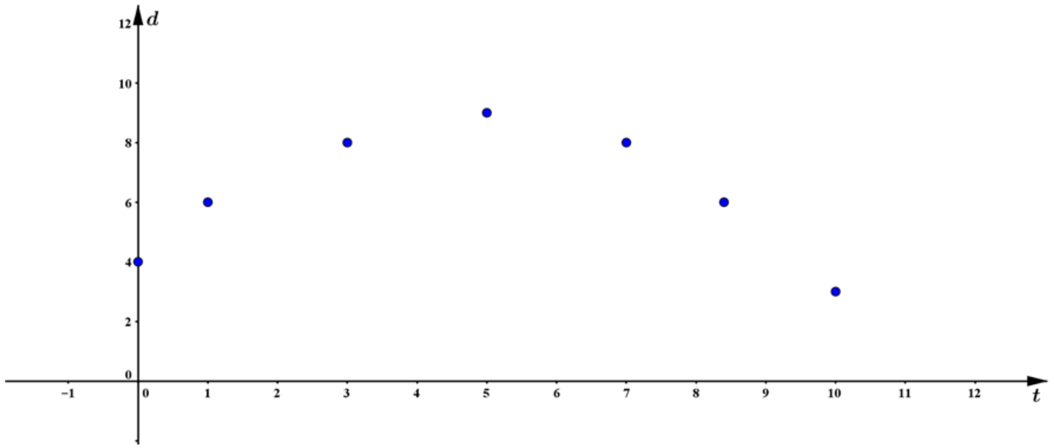
f. ¿En qué momento se determina la altura máxima?



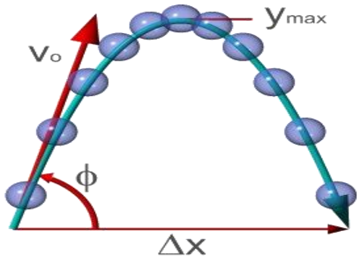
MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

a. Graficando los datos, se obtiene:



Coordenadas de tiempo (*t*) vs distancia (*d*) del lanzamiento del proyectil.



b. La función que podría modelar razonablemente la situación planteada es una función cuadrática.

La función cuadrática buscada es de la forma:

$$d(t) = at^2 + bt + c.$$

Para determinar los coeficientes *a, b* y *c* de esta función, se escogen 3 puntos de la tabla, por ejemplo, se trabaja con los puntos (0,4), (5,9) y (10,3):

Como *d(0)=4*, se tiene que *c = 4*.

Considerando que *d(5)=9* y *d(10)=3*, se obtiene el siguientes sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 25a + 5b = 5 \\ 100a + 10b = -1 \end{cases}$$

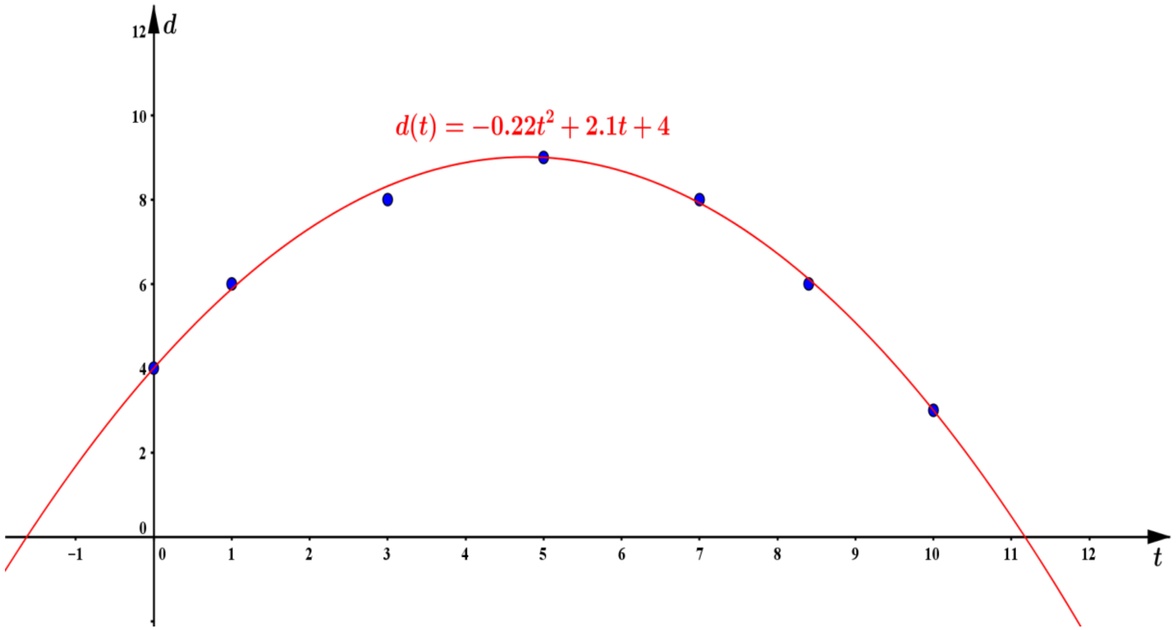
MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

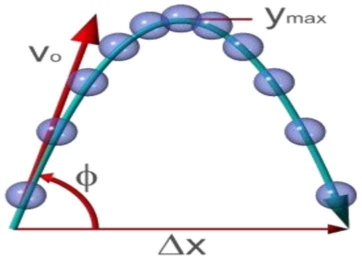
Resolviendo este sistema se obtiene *a* = *−0.22* y *b* = *2.1*. Por lo tanto, la función cuadrática que modela la situación es:

$$d(t) = -0.22\,t^2 + 2.1\,t + 4$$

El gráfico que representa el modelo para la situación dada se puede observar en la siguiente figura:



Función de ajuste para la línea de puntos.



MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

d. ¿A qué altura se encuentra el proyectil a los 9 segundos de ser lanzado?

$$\boldsymbol{d(t) = -0.22\, t^2 + 2.1\, t + 4}$$

Reemplazamos $t = 9$ en la función d(t):

$d(9) = -0.22\,(9)^2 + 2.1\,(9) + 4$

$d(9) = 5.08$

De ahí que, a los 9 segundos el proyectil estará a 5.08 metros aproximadamente.

e. ¿En qué momento el proyectil vuelve al suelo?

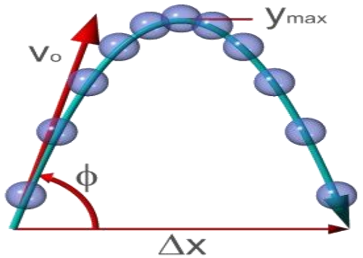
$$\boldsymbol{d(t) = -0.22\, t^2 + 2.1\, t + 4}$$

Determinamos t para d$(t) = 0$:

$-0.22\, t^2 + 2.1\, t + 4 = 0$

Con lo que se obtiene $t = 11.17$.

Luego, el proyectil llega al suelo a los 11.17 segundos.



MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

f. ¿En qué momento se determina la altura máxima?

$$\boldsymbol{d(t) = -0.22\,t^2 + 2.1\,t + 4}$$

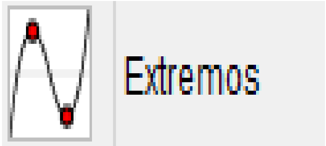
Vértice (V): Punto más bajo o más alto de la gráfica de la función cuadrática. Recordemos que para determinar el vértice de una parábola se tiene:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

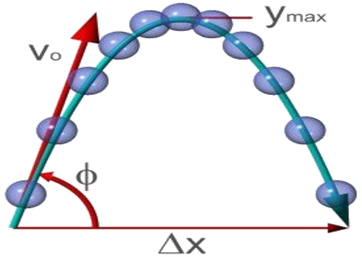
Donde f hace referencia a la función d de nuestro ejemplo, que en este caso depende de la variable t.

De ahí que: $$V\left(\frac{-2.1}{2(-0.22)}, f\left(\frac{-2.1}{2(-0.22)}\right)\right) = V(4.77{,}0.91)$$

Por tanto, el proyectil alcanza su altura máxima a los 4.77 segundos.



Con la instrucción Extremos encuentra las coordenadas del *punto máximo* (4.77, 0.91).



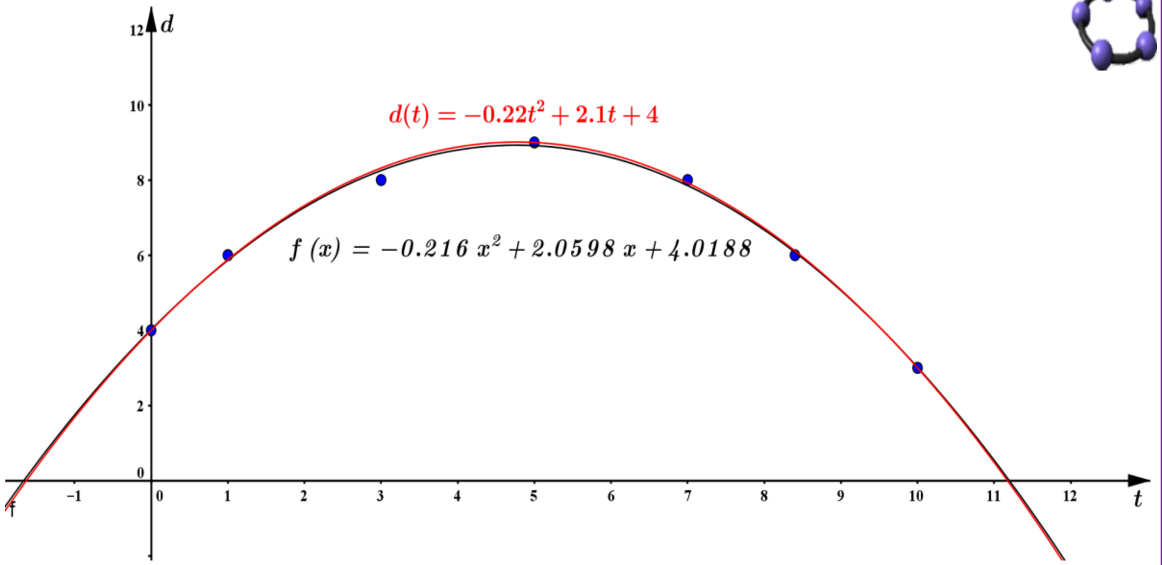
MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 47.

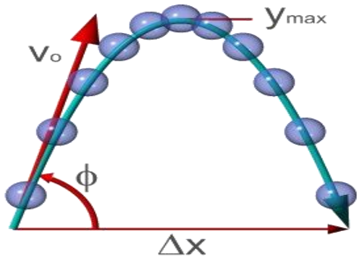
Si la manera de graficar los puntos en Geogebra se ha hecho uno a uno, en la *Vista Algebraica de Geogebra* se puede observar que *A, B, C, D, E, F y G* corresponden a cada una de las coordenadas de los puntos de la gráfica, para este caso, se escribe en el *Campo de Entrada* la instrucción *AjustePolinómico* de la siguiente manera:

Entrada: AjustePolinómico[A,B,C,D,E,F,G,2]

*(*se introducen los puntos y por último el grado del polinomio de ajuste, en este caso 2*)*.



Función $f(x)$ para la línea de puntos con instrucción *Ajuste Polinómico* de *Geogebra*.



MODELOS FUNCIONALES

Dados los ejemplos 45, 46 y 47, hemos visto como, a partir de un conjunto de datos, se obtiene una función que representa una situación dada, a continuación, se presenta un ejemplo que no parte precisamente de un conjunto de datos y que de igual manera se puede representar matemáticamente.

MODELOS FUNCIONALES

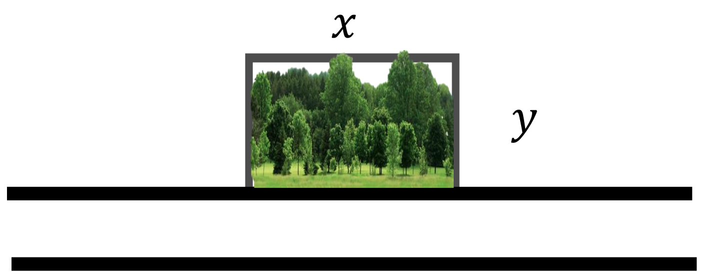
Ejemplo 48.

Se planea crear un área forestal rectangular a lo largo de una carretera que tendrá un área de 5 kilómetros cuadrados y se encerrará por los tres lados no adyacentes a la vía.

Con esta información el problema a resolver es:

Exprese el *número de kilómetros* de cercado que se necesita como una función de la *longitud del lado no cercado*.

Es natural comenzar introduciendo dos variables, x e y para denotar la longitud de los lados del área requerida como muestra la figura:



y expresar el número de kilómetros F de cercado requerido en términos de estas dos variables y que se denomina ecuación $(\mathbf{1})$:

$$F(x,y) = x + 2y \qquad (\mathbf{1})$$

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 48.

Como la meta es expresar el número de kilómetros F de cercado como una función de x, debe hallarse la forma de expresar y en términos de x.

Para lograrlo, se utiliza el hecho de que el área será de 5.000 kilómetros cuadrados y se escribe:

$$xy = 5.000$$

Despeje y de la ecuación anterior, con lo que se obtiene la ecuación **(2)**:

$$y = \frac{5.000}{x} \qquad (\mathbf{2})$$

Sustituye la expresión resultante $(\mathbf{2})$ en la expresión $(\mathbf{1})$ para obtener:

$$F(x) = x + 2\left(\frac{5.000}{x}\right)$$

De ahí que F expresa, el número de kilómetros de cercado que se necesita como una función de la longitud del lado no cercado, es decir en función de x.

$$\boldsymbol{F(x) = x + \frac{10.000}{x}}$$

MODELOS FUNCIONALES

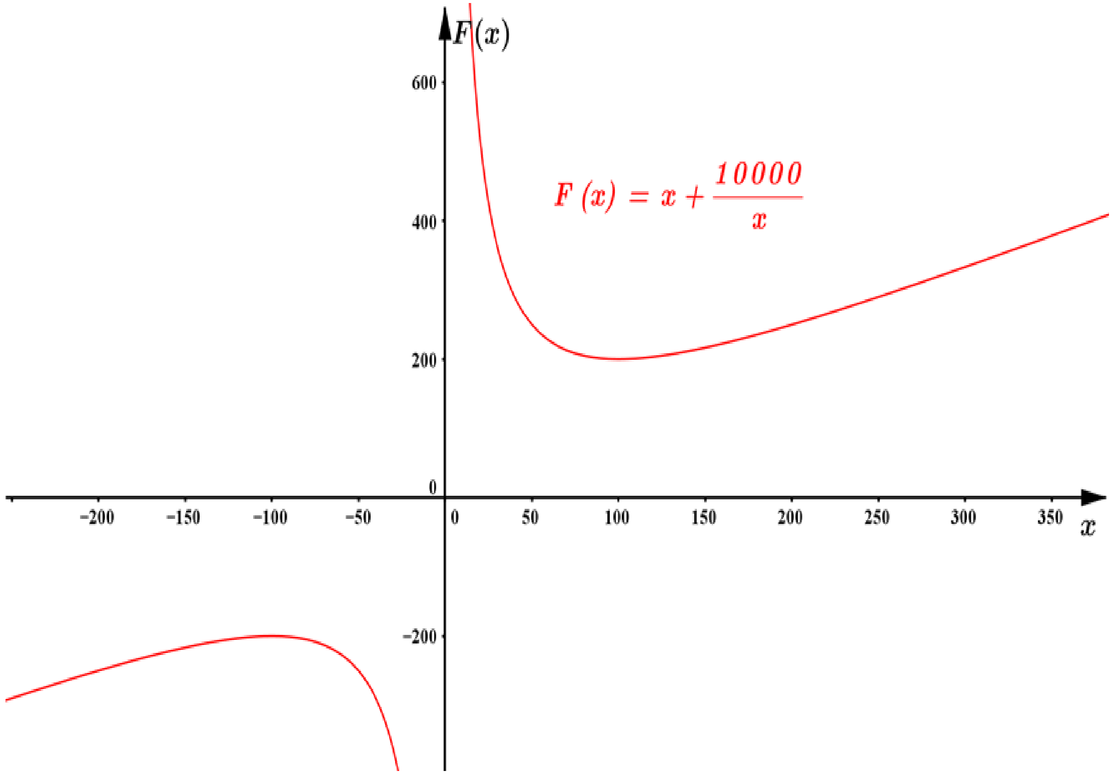
Ejemplo 48.

Aparte de modelar el problema dado, se puede considerar la gráfica de la función $F(x)$ y hacer algún tipo de consideración al respecto:

Instrucción en *Geogebra*, para la gráfica de la función especificada.

Entrada: F(x) = x + 10000 / x

Con lo que se obtiene la siguiente figura:



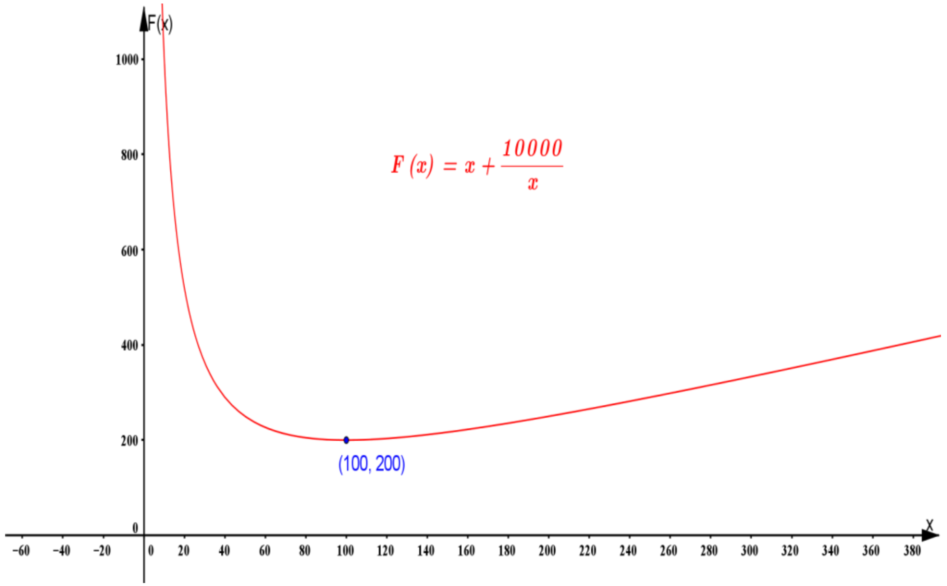
Función que especifica el número de kilómetros (F) en función del lado no cercado (x).

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 48.

Dadas las características del ejemplo, la función F tiene sentido para valores positivos de x, además podrían también considerarse, por ejemplo, los valores de x comprendidos en el intervalo [40,180].

Es decir, el frente de la zona forestal debe estar entre 40 y 180 m; representados en la figura siguiente.



Delimitación de los datos según

la dinámica del ejercicio.

Con la instrucción Extremos encuentra las coordenadas del *punto mínimo* (100, 200).

¿Qué significa que la imagen de x=100 sea 200?

MODELOS FUNCIONALES

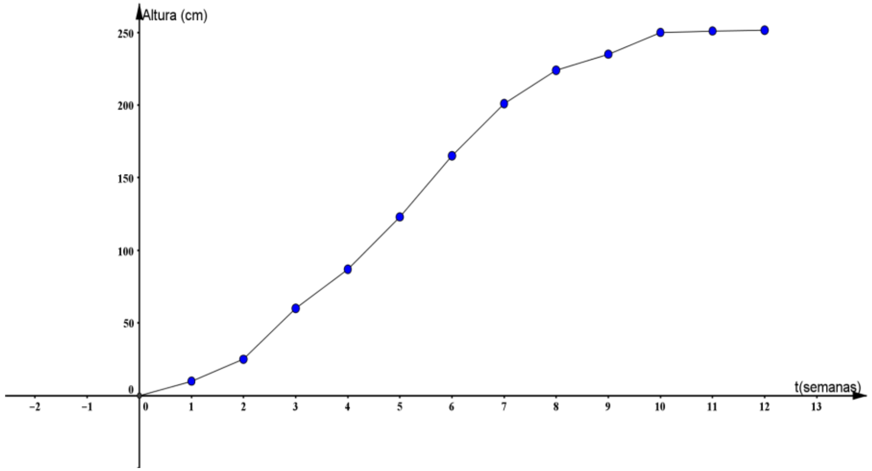
Ejemplo 49.

Los siguientes datos corresponden a las mediciones de la altura de una planta de girasol, cada semana.

t (semanas)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Altura (cm)	10	25	60	87	123	165	201	224	235	250	251	251.5

Determine una función que represente el crecimiento de la planta de girasol a través del tiempo.

En estos casos, para tener una idea de cómo sería la gráfica unimos los puntos con segmentos rectilíneos y se obtiene un trazo poligonal para la gráfica de la función.



Crecimiento en cm de la planta de girasol en un tiempo t en semanas.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 49.

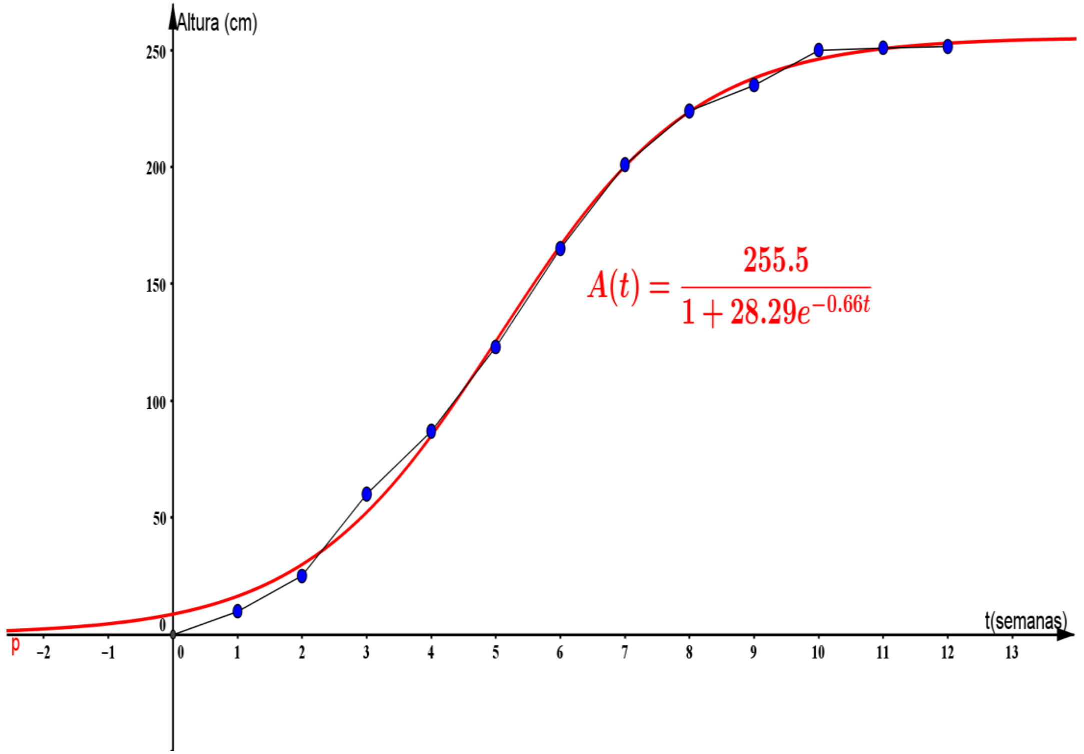
Se escribe en el *Campo de Entrada* en Geogebra la instrucción Ajustelogístico:

Entrada: AjusteLogístico[A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L]

con lo que se obtiene:

$$A(t) = \frac{255.5}{1 + 28.29e^{-0.66t}}$$

Nota: La teoría para estimar la función Logística $A(t)$, la dejamos para un curso posterior, por ahora se puede usar la instrucción dada.



Modelo de ajuste para la estimación del crecimiento en cm de la planta de girasol en un tiempo t en semanas.

MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 50.

Los siguientes datos corresponden a las mediciones del número de contagiados de Covid-19 dado en semanas en cierta población del departamento del Cauca-Colombia.

t (semanas)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Contagiados	5	15	45	105	180	200	221	302	418	516	621	802

t (semanas)	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Contagiados	989	1332	1753	2312	2786	3010	3567	4010	4232	4356	4399	4578

Determine una función que represente el incremento de número de contagiados a través del tiempo.

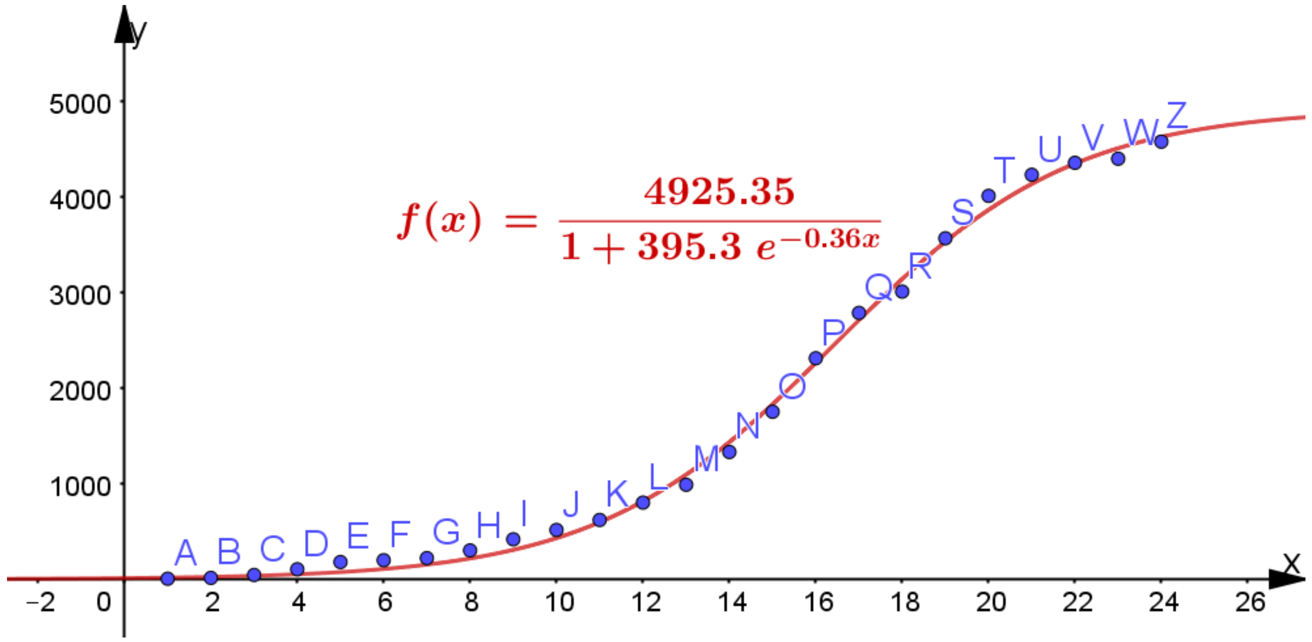
MODELOS FUNCIONALES

Ejemplo 50.

Los siguientes datos corresponden a las mediciones del número de contagiados de Covid-19 dado en semanas en cierta población del departamento del Cauca-Colombia.

Determine una función que represente el incremento de número de contagiados a través del tiempo.

Al igual que en el ejemplo anterior, se hace uso en Geogebra de la instrucción Ajustelogístico, con lo que se obtiene:



MODELOS FUNCIONALES

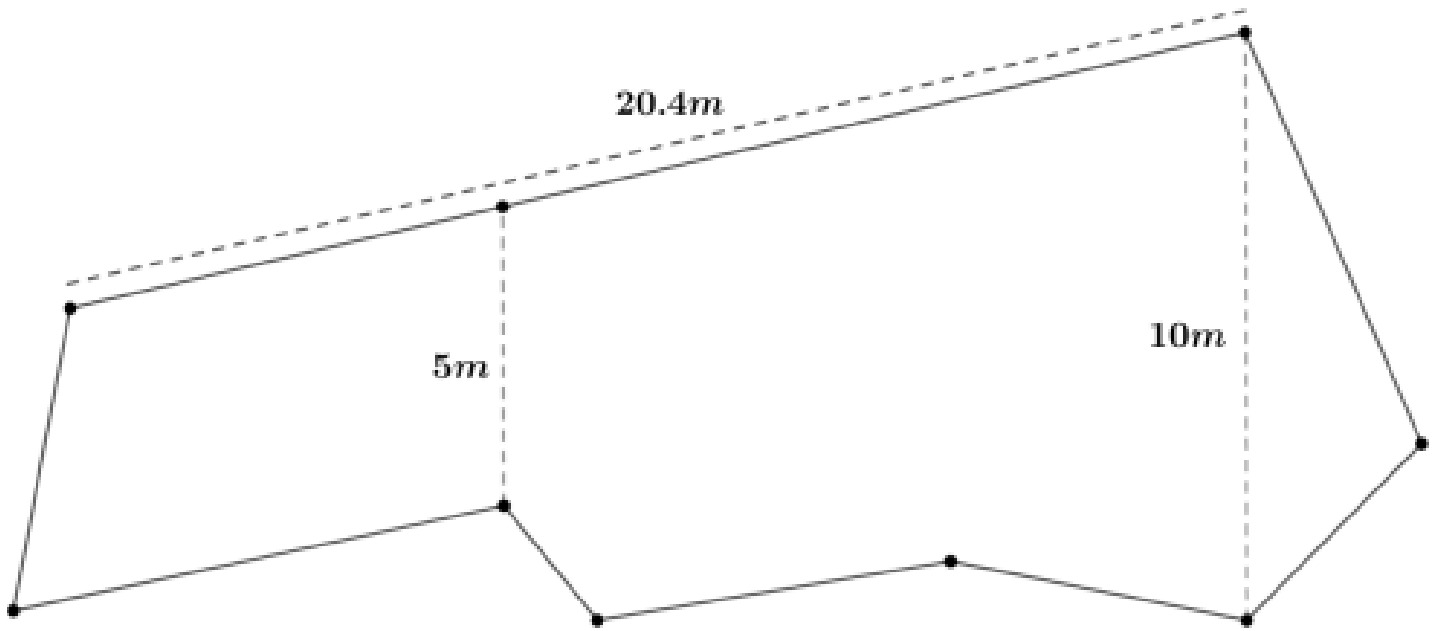
Ejercicio 35.

Se va a usar un terreno rectangular de $4m$ por $8m$ para plantar un jardín. Se decide construir un corredor pavimentado en todo el borde, de manera que quedan $12m^2$ del terreno para cultivar las flores. ¿Cuál debe ser el ancho del corredor?

MODELOS FUNCIONALES

Ejercicio 36.

Se tiene un terreno en el que se requiere hacer una siembra de fríjol, donde se determinan las longitudes de $5m$, $10m$ y $20{,}4m$. Como lo muestra la figura.



MODELOS FUNCIONALES

Ejercicio 36.

a. Si la distancia entre surcos es 60cm y cada 10 surcos se dejará una calle de 2.4m. ¿Cuántos surcos se sembrarán?
b. Si el peso de 100 semillas es 29 gramos, calcule la cantidad de semilla requerida en todo el lote si se siembran 2 semillas por sitio (punto de siembra), con una distancia de 10cm entre sitios.
c. ¿Cuántos gramos son necesarios para sembrar todo el terreno?
d. Determine cuántas plantas de fríjol se podrán cosechar al final, si la semilla germina al 100% y no hay problemas de plagas y/o enfermedades.

BIBLIOGRAFÍA

- Cálculo con aplicaciones en Biología. Homero G. Daz Marn.
- FAO. Food and Agriculture Organization. Análisis de Sistemas de Producción Animal - Tomo 2: las Herramientas Básicas. (Estudio FAO Producción y Sanidad Animal 140/2). 1997. Disponible en la web: http://www.fao.org/docrep/W7452S/W7452S00.html.
- Curso: Modelos matemáticos y funciones. Tema: Modelos funcionales. Universidad de Talca. Instituto de Matemática y Física. Profesores: Juanita Contreras S y Claudio del Pino O.