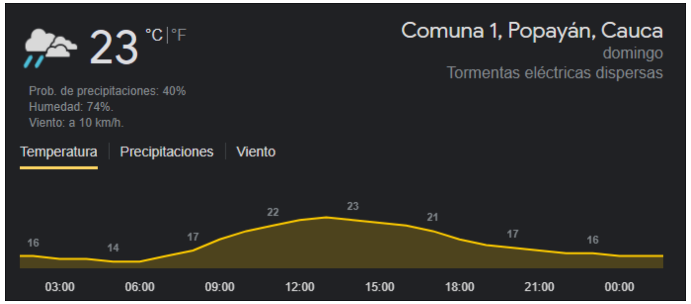
CURSO DE CÁLCULO INTEGRAL

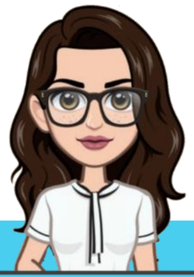
TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES (TVM)

Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

TVM

Sabemos que, si queremos encontrar el promedio de un conjunto de valores, lo que debemos hacer es sumar dichos valores y dividir el resultado entre el número total de datos (finitos). Ahora, si lo que se busca es encontrar el valor promedio de un conjunto de datos (infinitos) en un intervalo dado [a,b] hacemos uso del Teorema del valor medio para integrales, partiendo del concepto fundamental para encontrar un valor promedio y la teoría básica del inicio de este capítulo donde se hacen n divisiones sucesivas y se realiza una suma infinita que como se ha visto previamente, esto representa una integral definida en el intervalo dado [a,b]. Con este teorema podemos entonces encontrar por ejemplo promedios de funciones que están relacionadas con Temperatura, Densidad, Velocidad, Ángulos. Etc





Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

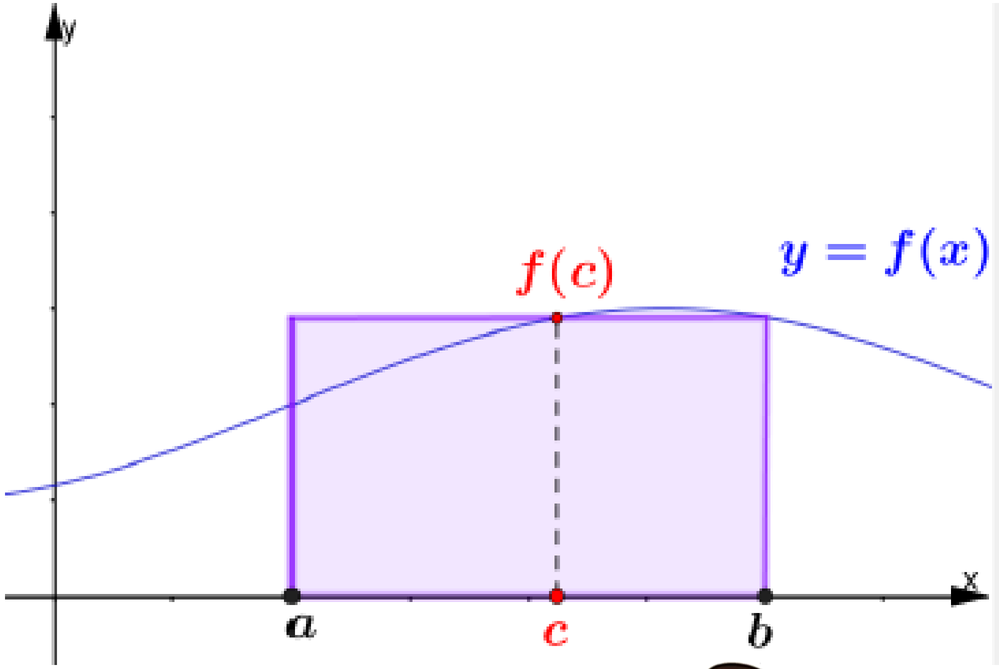
TVM

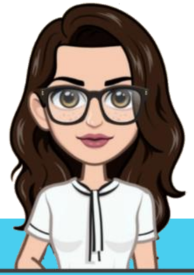
Sea f continua en $[a, b]$. El valor medio de f en el intervalo dado está dado por:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

El teorema asegura que existe un valor c en el intervalo (a, b) cuya imagen corresponde a la altura del rectángulo de base (b - a) y su área coincide con la de la región definida por la función f en dicho intervalo. Esto es:

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$$





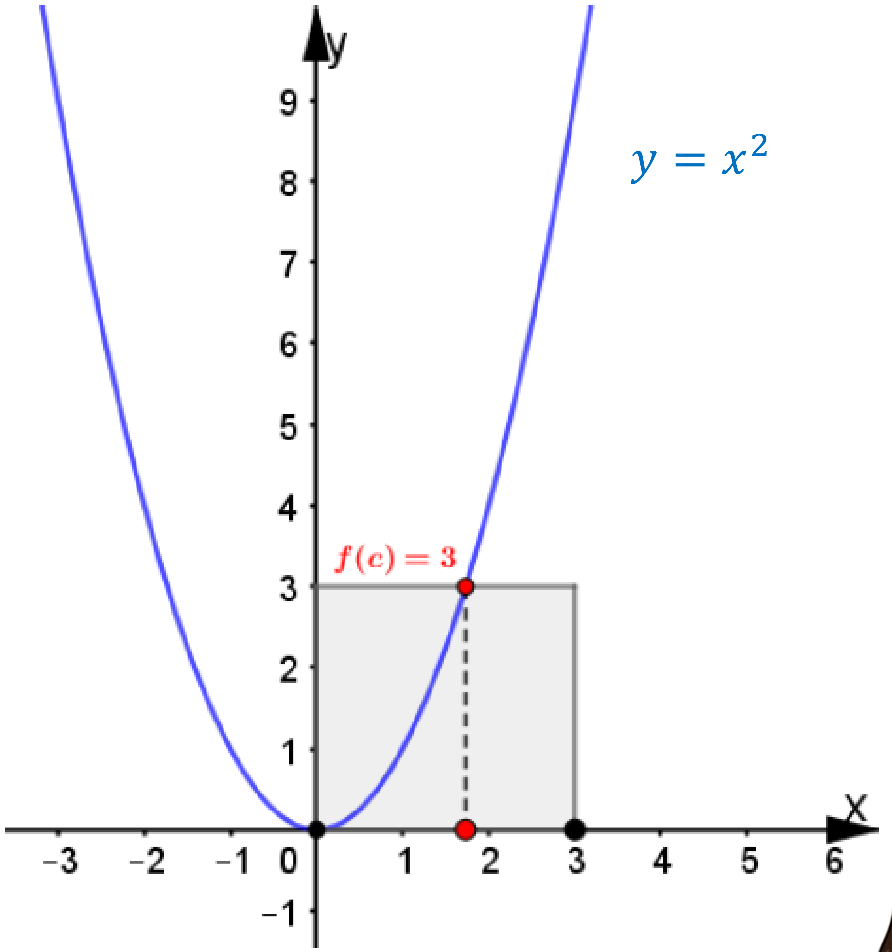
TVM

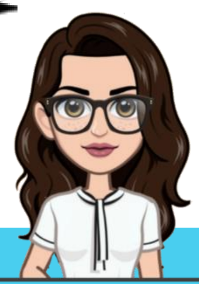
Ejemplo: Encontrar el valor medio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,3]$.

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2 dx$$

$$f(c) = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$f(c) = 3$$





TVM

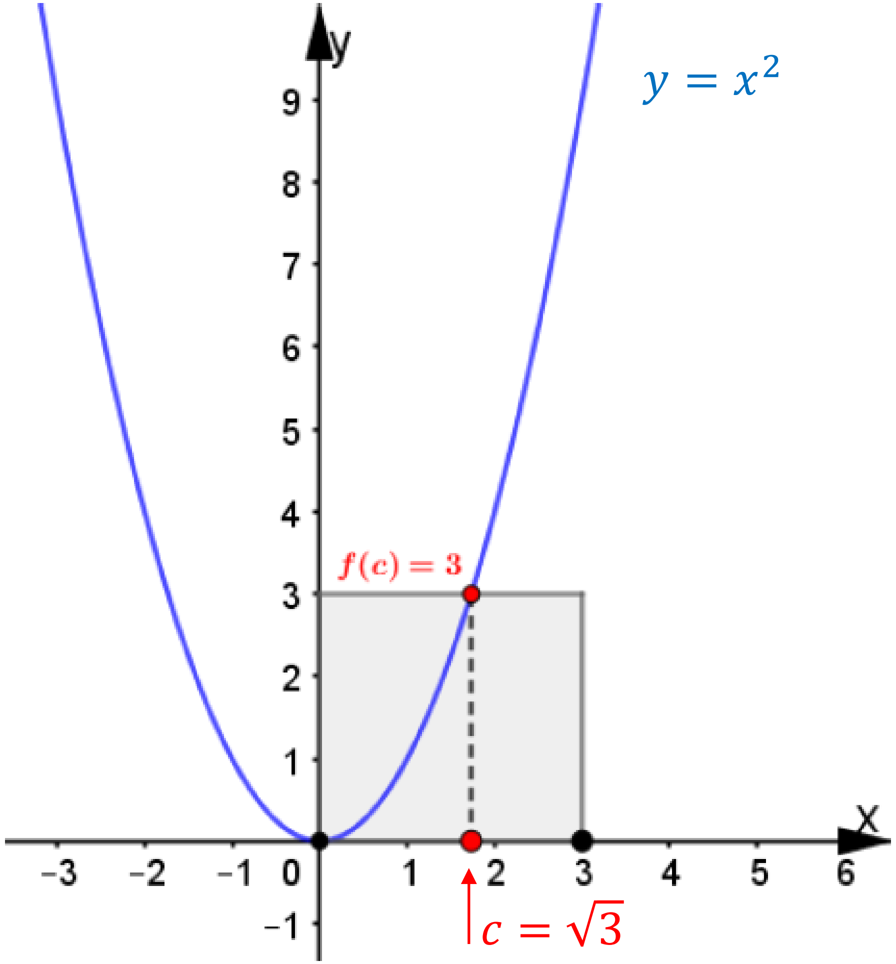
Si lo que se busca es encontrar el valor o valores de "c" que satisfacen el TVM, se procede de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f(c) = c^2$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

$$c_1 = -\sqrt{3} \qquad c_2 = \sqrt{3}$$



TVM ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio: Encontrar el valor o valores de "c" que satisfacen el Teorema del Valor Medio para las siguientes funciones en el intervalo dado.

Grafique cada función y el rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$.

1. $y = x^3$ en $[0,3]$.

2. $y = x - \sqrt{x}$ en $[1,4]$.

Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

TVM

Ejemplo: Si en el 2011 la población mundial fue de 7000 millones de personas y para un tiempo t en años, la población $P(t)$ está dada por la expresión: $P(t) = 7000e^{0{,}00992t}$.
Determine el promedio de habitantes de la tierra en un período de 20 años.
¿En qué año se encuentra dicho valor promedio?

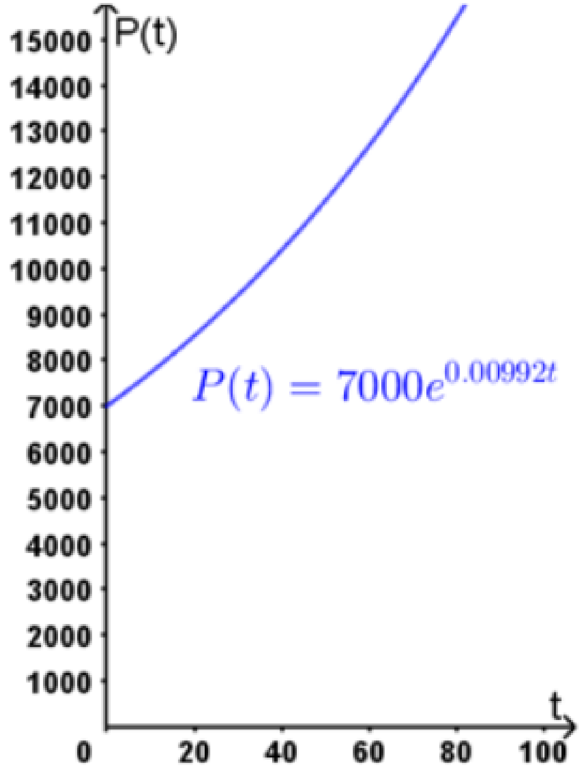
Solución: Hallamos el valor promedio de $t = 0$ a $t = 20$.
($t = 0$ corresponde al año 2011 y $t = 20$ corresponde al año 2031).

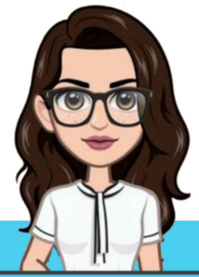
$$P(c) = \frac{1}{20-0}\int_0^{20} 7000e^{0{,}00992t}\,dt$$

$$P(c) = \frac{1}{20}\left[\frac{7000}{0{,}00992}e^{0{,}00992t}\right]_0^{20}$$

$$P(c) = \frac{1}{20}[705645{,}16129e^{0{,}00992t}]_0^{20}$$

$$P(c) = 7744$$





Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

TVM

Ejemplo: Si en el 2011 la población mundial fue de 7000 millones de personas y para un tiempo t en años, la población $P(t)$ está dada por la expresión: $P(t) = 7000e^{0,00992t}$.
Determine el promedio de habitantes de la tierra en un período de 20 años.

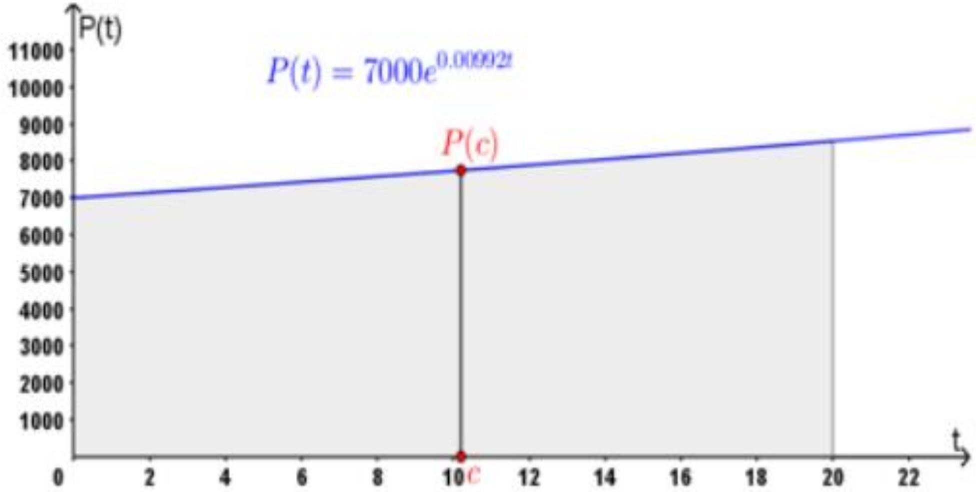
Solución: Hallamos el valor promedio de $t = 0$ a $t = 20$.
($t = 0$ corresponde al año 2011 y $t = 20$ corresponde al año 2031).

$$P(c) = \frac{1}{20-0}\int_0^{20} 7000e^{0,00992t}dt$$

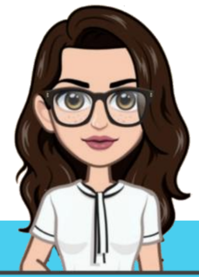
$$P(c) = \frac{1}{20}\left[\frac{7000}{0,00992}e^{0,00992t}\right]_0^{20}$$

$$P(c) = \frac{1}{20}\left[705645,16129e^{0,00992t}\right]_0^{20}$$

$$P(c) = 7744$$

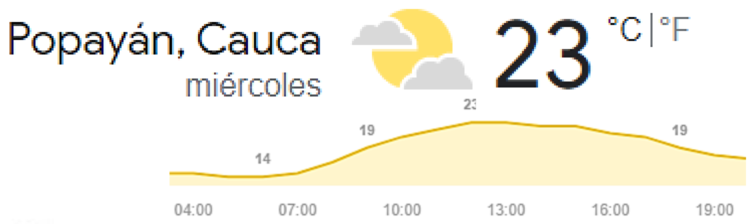


Por tanto, el promedio de habitantes en el mundo entre el 2011 y el 2031 es de 7744 millones de personas aproximadamente.



Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

TVM



Ejemplo: Se estima que en la ciudad de Popayán t horas después de las 6 de la mañana, durante un período de 12 horas, la temperatura (T) está dada por:

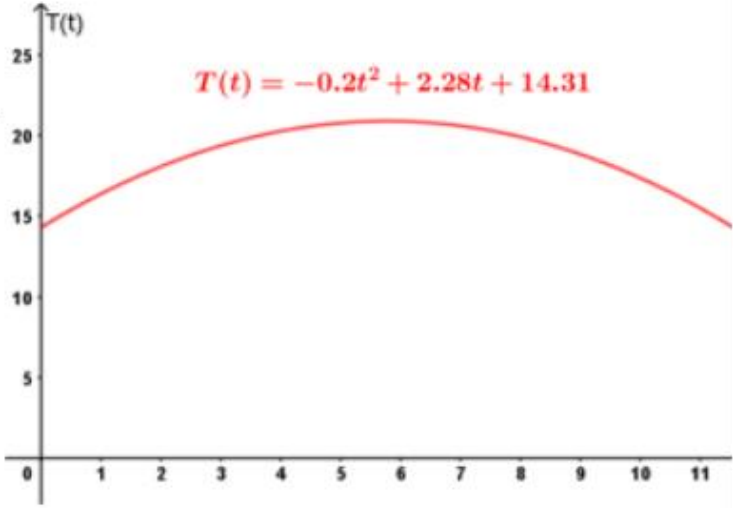
$$T(t) = -0{,}2t^2 + 2{,}28t + 14{,}31 \text{ grados centígrados}$$

Donde $0 \leq t \leq 12$.

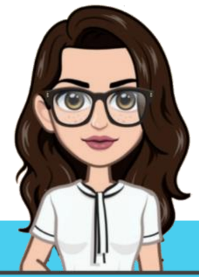
Estime la temperatura promedio entre las 8am y las 2pm.

Solución: Hallamos el valor promedio de $t = 2$ a $t = 8$.
($t = 0$ corresponde a las 6am y $t = 8$ corresponde a las 2pm).

$$\begin{aligned}
T(c) &= \frac{1}{8-2}\int_2^8 (-0{,}2t^2 + 2{,}28t + 14{,}31)dt \\
T(c) &= \frac{1}{6}\left[-0{,}2\frac{t^3}{3} + 2{,}28\frac{t^2}{2} + 14{,}31t\right]_2^8 \\
T(c) &= \frac{1}{6}[120{,}66] \\
T(c) &= 20{,}11
\end{aligned}$$



Por tanto, la temperatura media en la ciudad de Popayán entre las 8am y las 2pm es de $20.11^\circ C$ aproximadamente.



Profesora
Astrid Alvarez Castro
MATHSPACE

GRACIAS