APLICACIONES DE LA INTEGRAL

TEORÍA

ASTRID ALVAREZ CASTRO

WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

INTRODUCCIÓN

Los contenidos del curso se desarrollarán con el apoyo de los contenidos de Khan Academy las guías de clase y talleres propuestos estarán en www.mathspace.jimdo.com.

Usted debe ver los videos de este documento previamente a las reuniones programadas, en las que se discutirán los contenidos y ejercicios propuestos.

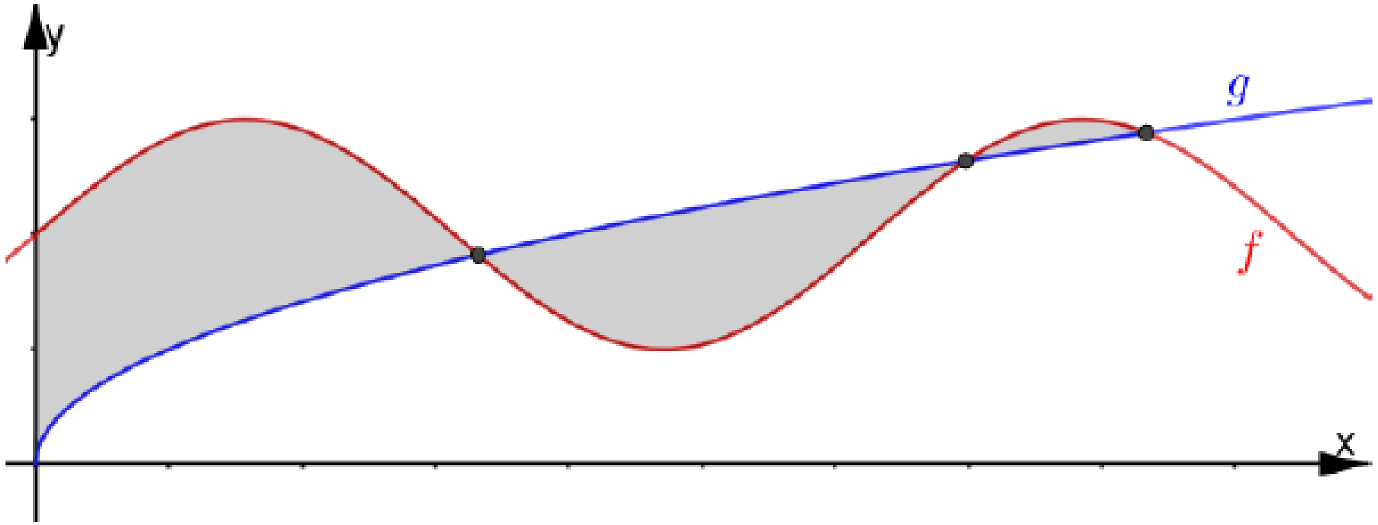
De igual manera usted puede estudiar directamente todos los videos en la página oficial de Khan Academy en español en el siguiente enlace:

INTRODUCCIÓN

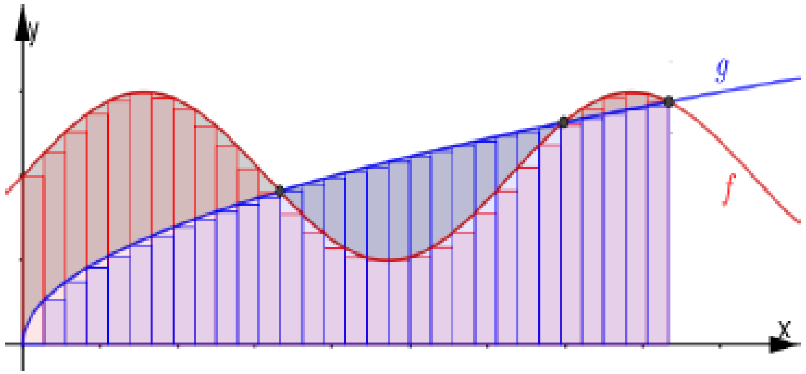
Facultad de Ciencias Agrarias-Unicauca. Foto: Astrid Álvarez C.

Nota: Los ejercicios que no se hagan en clase, se deben trabajar en casa y llevarlos a la clase siguiente para su discusión. (En lo posible, use Geogebra para verificar los resultados).

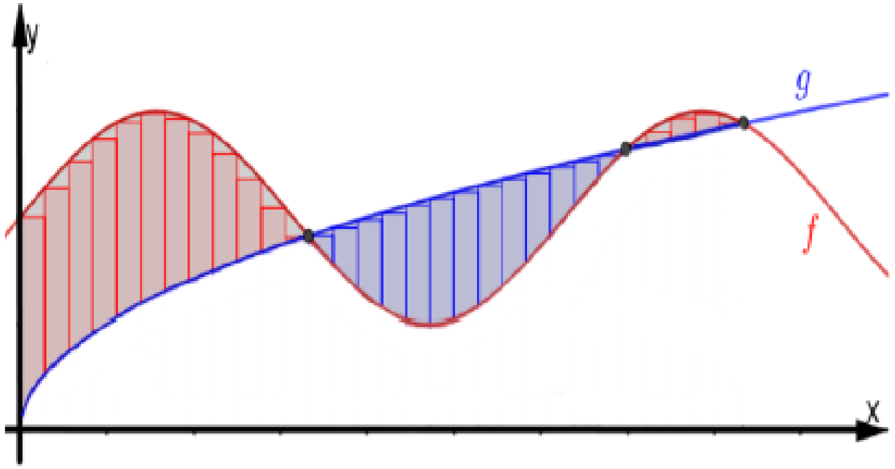
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



Se extiende el mismo análisis de "Área bajo la curva" visto en el capítulo anterior, a "Área de figuras planas" o Área entre dos funciones. Asociando particiones de infinitos rectángulos que abarquen el área de interés en un intervalo dado.



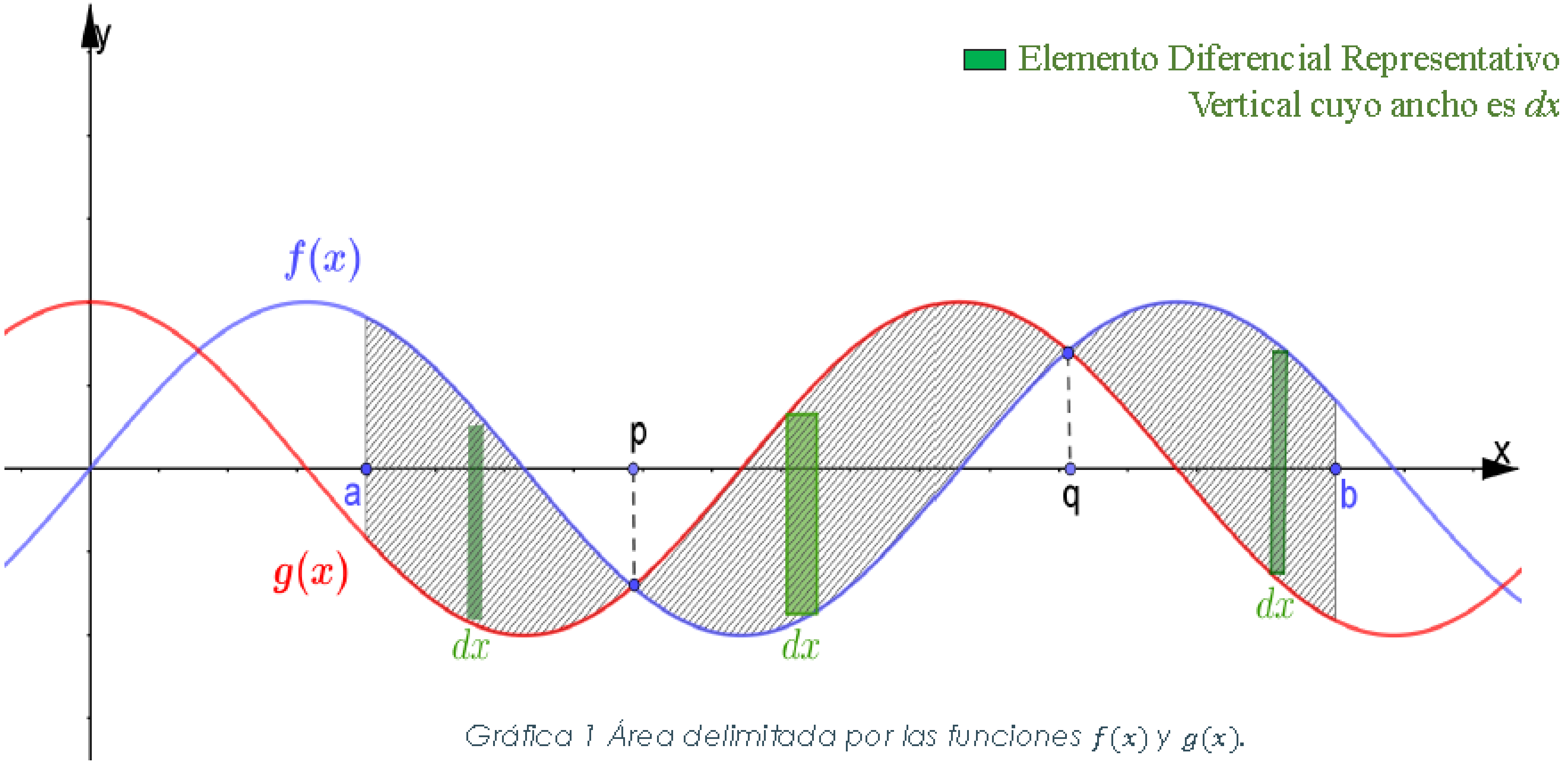
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Áreas de regiones simple-x

En este caso se deben determinar los subintervalos definidos cuando $a \leq x \leq b$ y descomponer la integral en suma de integrales correspondientes a cada uno de los subintervalos usando la operación adecuada (suma o resta según corresponda). En este caso la integral resultante depende de la variable "x".

Si la región plana tiene la forma de la Gráfica 1:

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



Gráfica 1 Área delimitada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

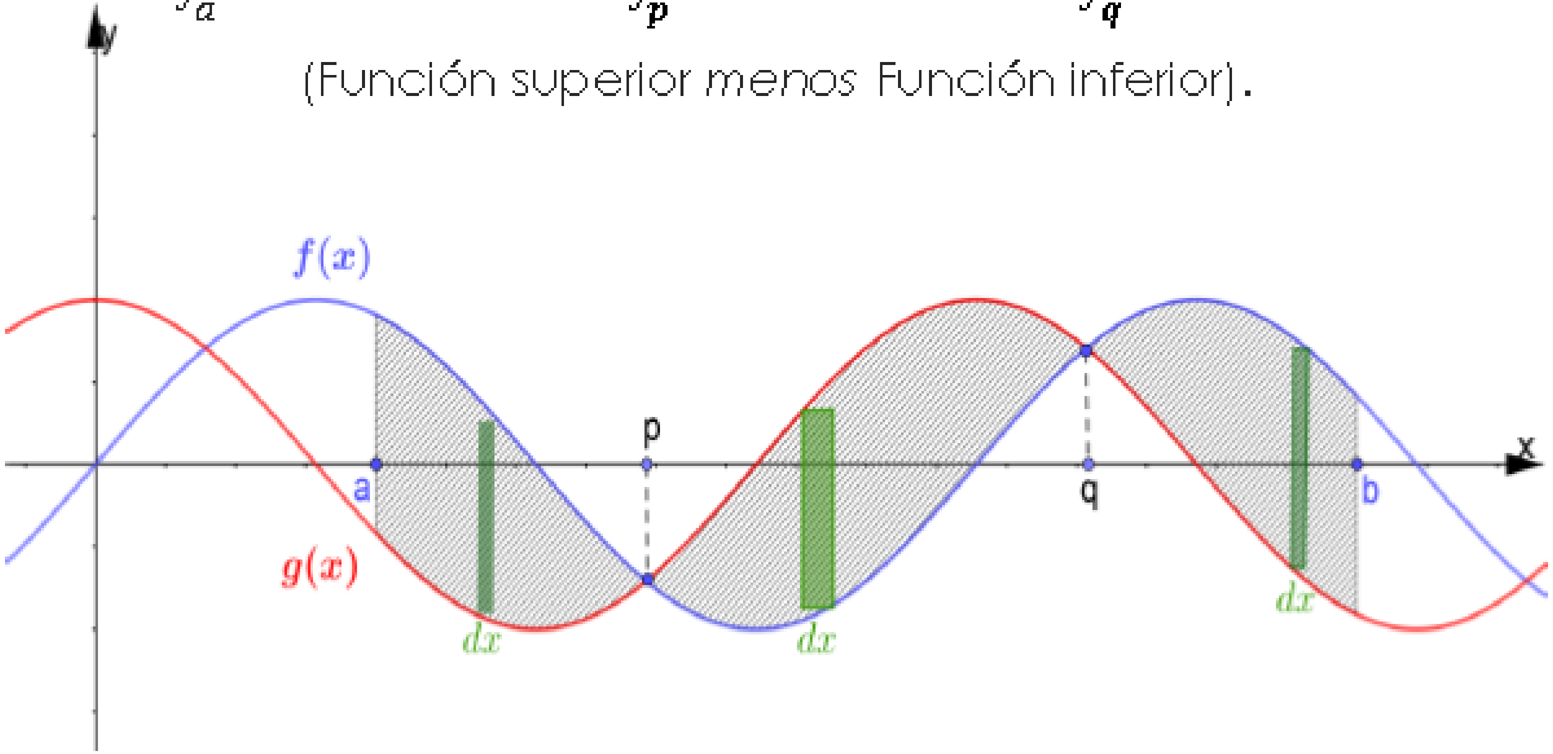
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Área de regiones simple-x

El área definida por las funciones dadas está determinada por:

$$A = \int_a^p [f(x) - g(x)]dx + \int_p^q [g(x) - f(x)]dx + \int_q^b [f(x) - g(x)]dx$$

(Función superior *menos* Función inferior).



Gráfica 1 Área delimitada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

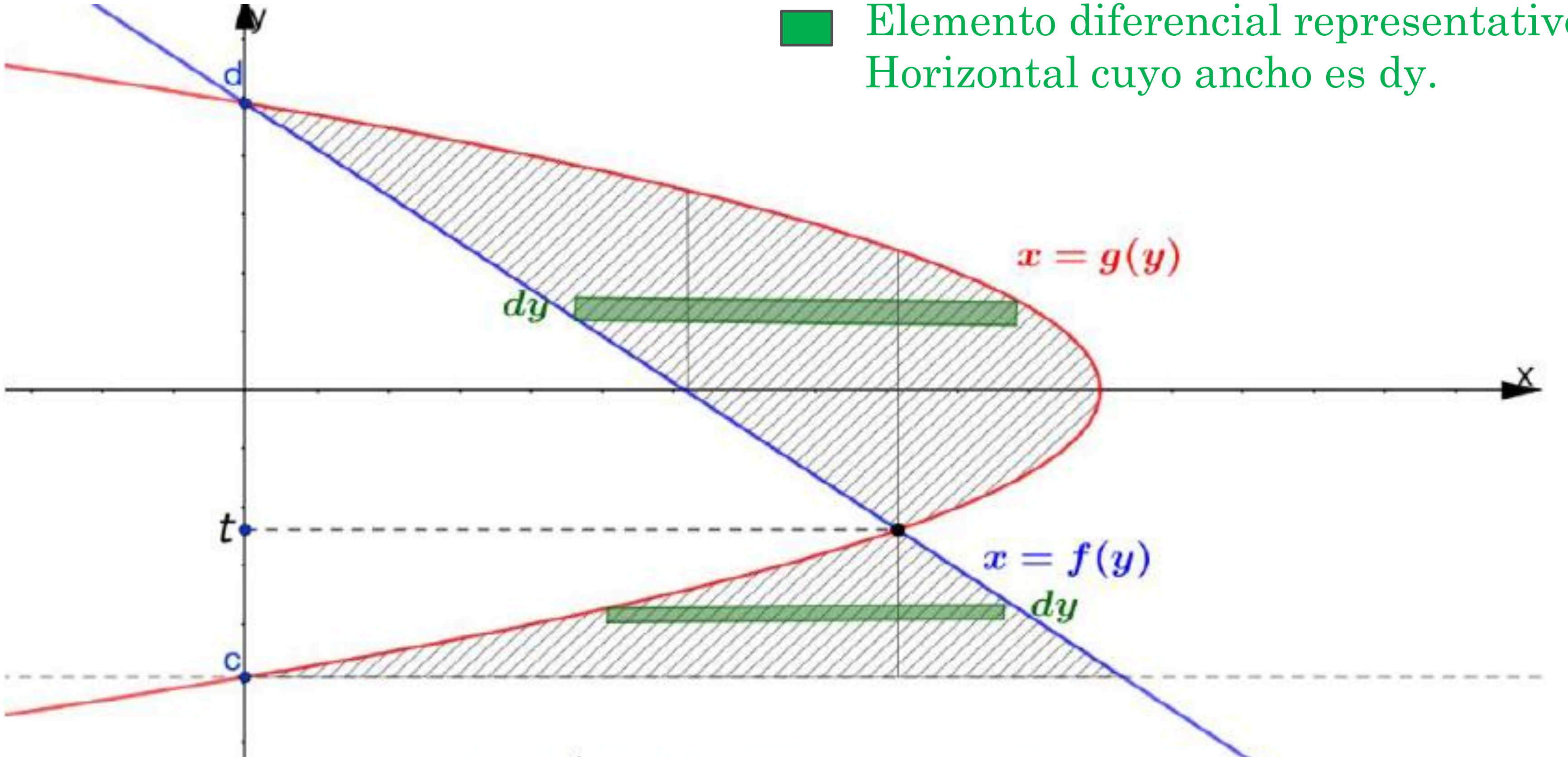
Áreas de regiones simple-y

En este caso se deben determinar los subintervalos definidos cuando $c \leq y \leq d$ y descomponer la integral en suma de integrales correspondientes a cada uno de los subintervalos usando la operación adecuada (suma y resta según corresponda). En este caso la integral resultante depende de la variable "y".

Si la región plana tiene la forma de la Gráfica 2:

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Elemento diferencial representativo Horizontal cuyo ancho es dy.



Gráfica 2. Área delimitada por las funciones $f(y)$ y $g(y)$

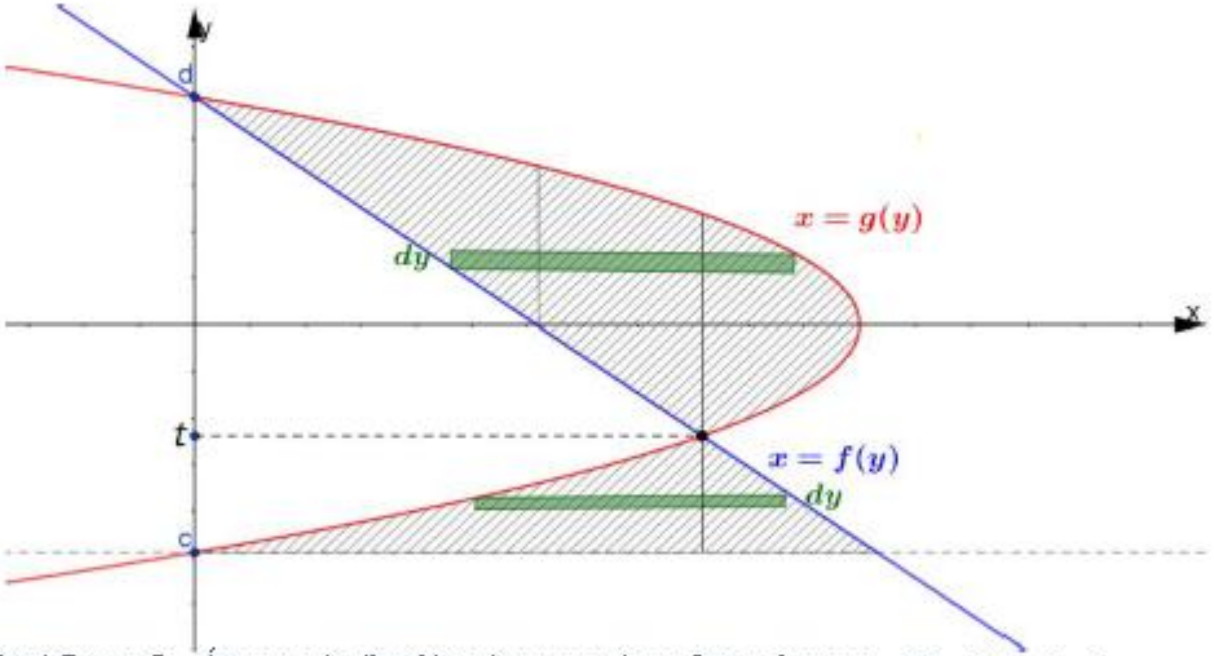
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Área de regiones simple-y

El área definida por las funciones dadas está determinada por:

$$A = \int_c^t [f(y) - g(y)]dy + \int_t^d [g(y) - f(y)]dy$$

(Función de la Derecha *menos* Función de la Izquierda).



Gráfica 2. Área delimitada por las funciones $f(y)$ y $g(y)$

www.mathspace.jimdo.com - Astrid Alvarez Castro

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Nota: El área de una misma región puede ser determinada en términos de elementos diferenciales horizontales y/o verticales.

Conclusiones:

Para hallar el área de una región plana:

1. Grafique las funciones dadas. Determine:
   a. Dominio de las funciones.
   b. Cortes con ejes coordenados.
   c. Coordenadas de puntos extremos.
   d. Interceptos entre funciones.
   e. Después de realizar los pasos a-d, tabular solo si es necesario con algunos "puntos clave".
2. Sombree la región a determinar. (Definida por un intervalo dado y/o los interceptos entre las funciones).
3. Defina el rectángulo diferencial según convenga (Horizontal y/o Vertical).
4. Escriba la integral definida (o integrales) para el área.
5. Evalúe la integral.
6. Verifique sus resultados con Geogebra.

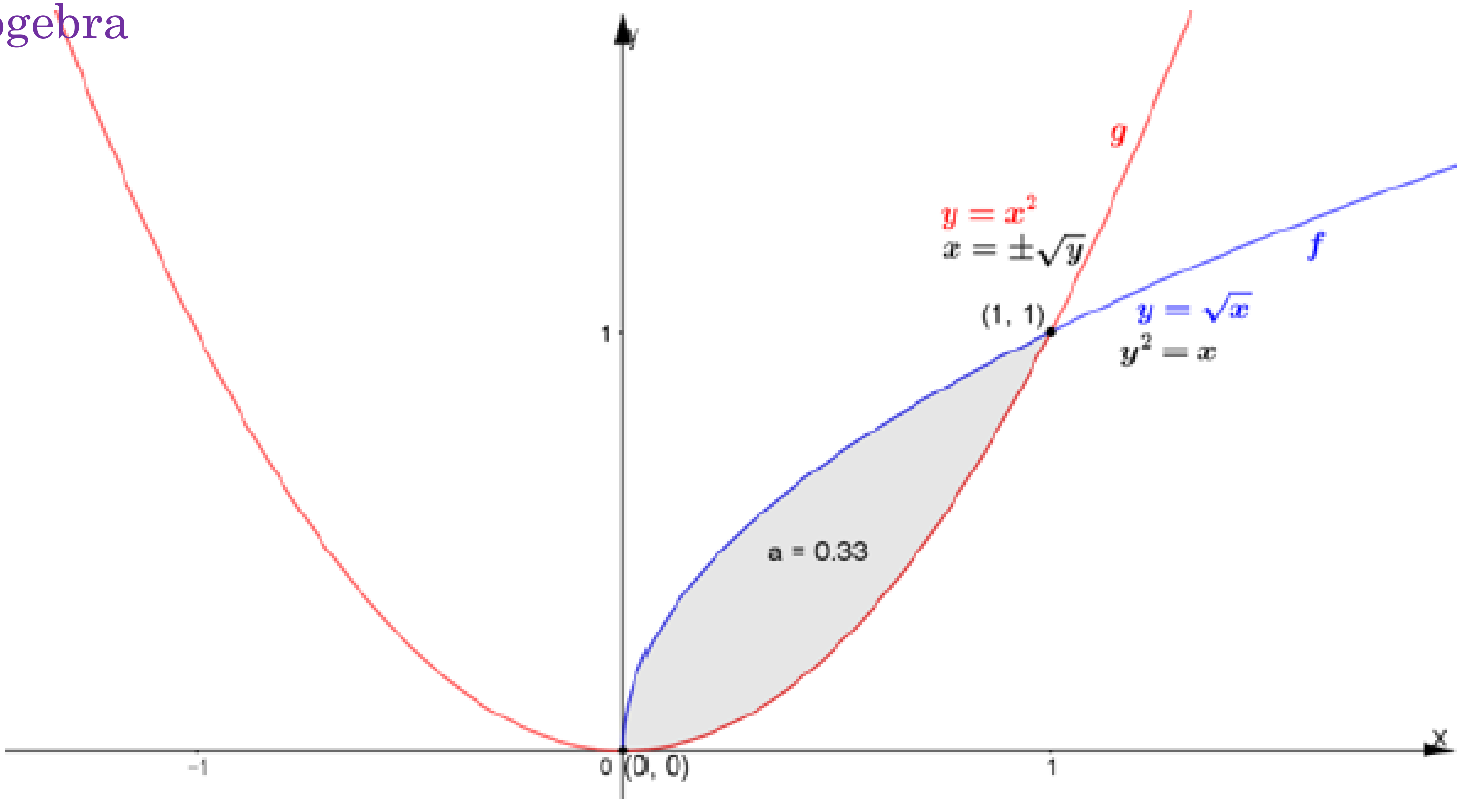
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Ejemplo 1. En Geogebra

Determinar el área definida por las funciones

$y = \sqrt{x},\ y = x^2$

cuando $0 \leq x \leq 1$.



Gráfica 3. Representación gráfica del Ejemplo 1.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

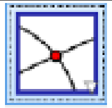
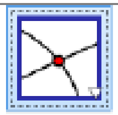
Ejemplo 1 En Geogebra

Determinar el área definida por las funciones

$y = \sqrt{x},\ y = x^2$

cuando $0 \leq x \leq 1$.

Protocolo de construcción en Geogebra para la Gráfica 3.

Nombre	**Ícono en la Barra de Herramientas**	**Instrucción**
Función f		$sqrt(x)$
Función g		x^2
Punto A		Selecciona la intersección o las dos funciones sucesivamente
Punto B		Selecciona la intersección o las dos funciones sucesivamente
Número a		IntegralEntre(f,g,0,1)

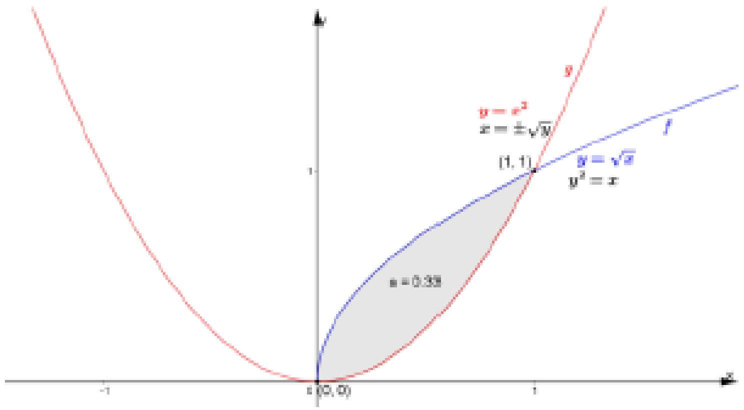
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Ejemplo 1. En Geogebra

Determinar el área definida por las funciones

$y = \sqrt{x},\ y = x^2$

cuando $\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}$.



Opción 1. Elemento diferencial vertical (Integral que depende de "x"). (Se despeja $\boldsymbol{y}$ en función de $\boldsymbol{x}$).

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}u^2$$

Opción 2. Elemento diferencial horizontal (Integral que depende de "y"). (Se despeja $\boldsymbol{x}$ en función de $\boldsymbol{y}$).

$$A = \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2)dy = \frac{1}{3}u^2$$

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

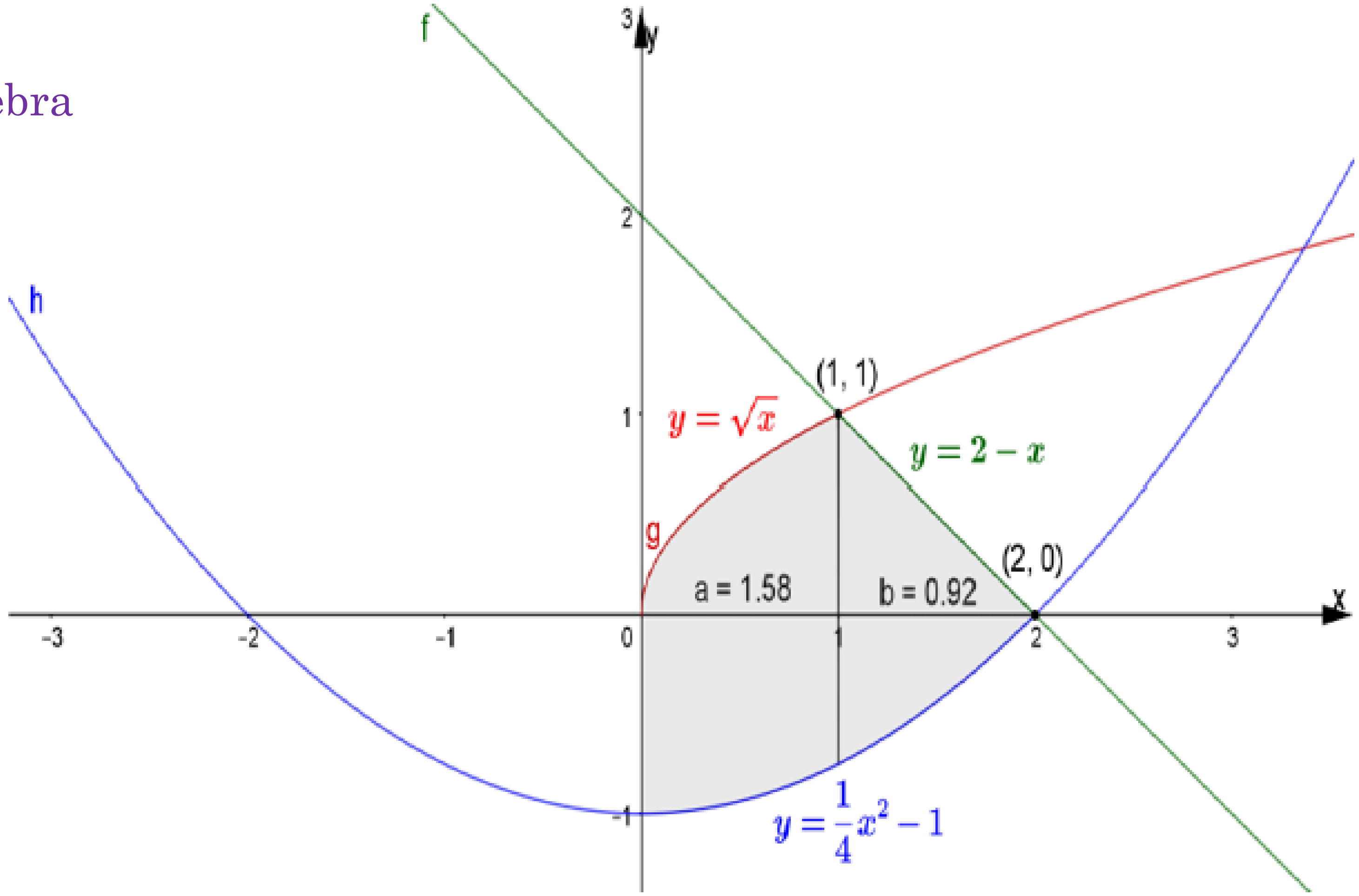
Ejemplo 2 En Geogebra

Área entre curvas con múltiples fronteras

Determinar el área definida por la región

$$R = \begin{cases} y = 2 - x \\ y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \end{cases}$$

En el intervalo $[0,2]$.



Gráfica 4. Representación gráfica de Ejemplo 2.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Ejemplo 2 En Geogebra
Área entre curvas con múltiples fronteras

Determinar el área definida por la región

$$R = \begin{cases} y = 2 - x \\ y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \end{cases}$$

En el intervalo $[0,2]$.

Protocolo de construcción en Geogebra para la Gráfica 4.

Nombre	Ícono en la Barra de Herramientas	Instrucción
Función f		$2 - x$
Función g		$sqrt(x)$
Función h		$\frac{1}{4}x^2 - 1$
Punto A		Selecciona la intersección o las dos funciones sucesivamente
Punto B		Selecciona la intersección o las dos funciones sucesivamente
Punto C		Selecciona la intersección o las dos funciones sucesivamente
Número a		IntegralEntre(g,h,0,1)
Número b		IntegralEntre(f,h,1,2)
Número c		a+b

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Ejemplo 2 En Geogebra

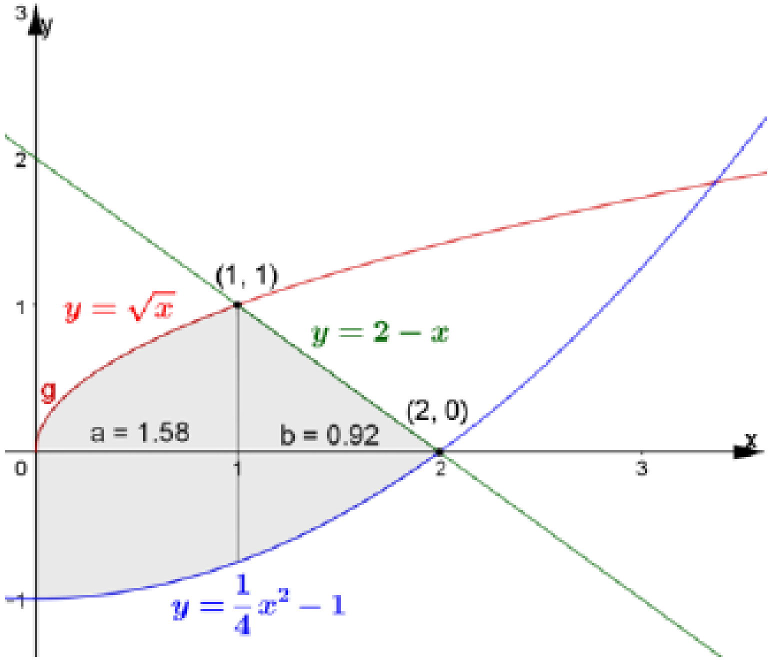
Área entre curvas con múltiples fronteras

Opción 1. Elemento diferencial vertical (Integral que depende de "x").

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right] dx + \int_1^2 \left[(2 - x) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right] dx$$

$$= \frac{5}{2}u^2$$

Ejercicio 1. Analizar la posibilidad de realizar el Ejemplo 2 con elemento diferencial horizontal.



Gráfica 4. Representación gráfica de Ejemplo 2.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Ejercicio 2. Determinar el área de la región delimitada en cada caso:

1.	$y = xln(x)$	$0 \leq x \leq 2$	
2.	$y = -x + 2$	$y^2 = 5x$	
3.	$x = 2$	$y = \sqrt{5x}$	$y = -\sqrt{5x}$
4.	$y^2 + 1 = x$	$y = x - 3$	
5.	$xy = 6$	$-4 \leq x \leq -2$	$y = 2$
6.	$y^2 = 8x$	$x^2 = 2y$	
7.	$8x^2 - 4x^3 = 0$	$x = -0.5$	$x = 2$
8.	$x = y^2$	$x = 2 - y^2$	
9.	$x^2 + y^2 = 3$	$x = -1$	$x = \sqrt{2}$
10.	$y = e^{x-1}$	$y = \ln(x)$	$1 \leq x \leq 2$
11.	$y = sen(x)$	$y = \cos(x)$	$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

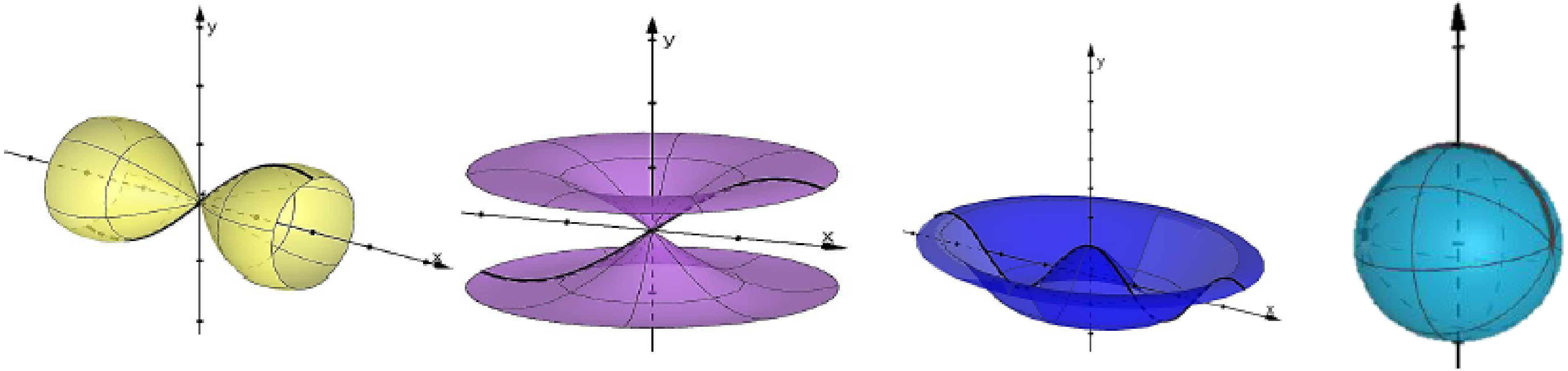
Ejercicio 2. Determinar el área de la región delimitada en cada caso:

12.	Hallar el área del menor de los sectores que la recta $x = 6$ determina con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 100$
13.	Calcular el área del triángulo de vértices A(3,1), B(7,7) y C(9,1).

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

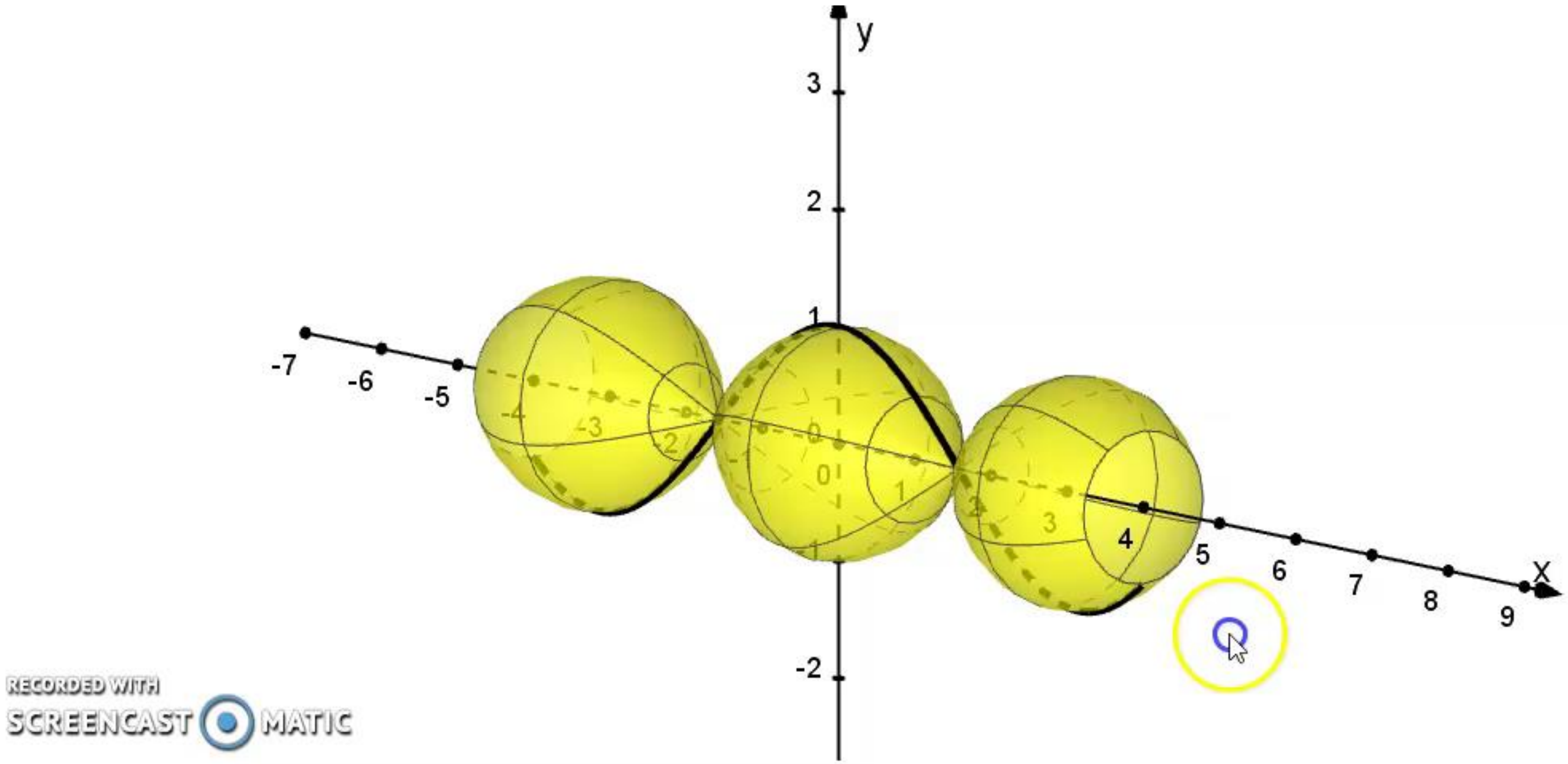
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Previamente se trabajó sobre el área de una región plana, ahora, si se hace girar esta región en torno a un eje determinado, la figura resultante es un Sólido de Revolución. Para determinar el volumen total de un sólido de revolución se parte del mismo concepto para encontrar áreas de figuras planas, determinando particiones (Elemento Diferencial Representativo) y estableciendo una suma infinita (integral). Para ello se exponen tres posibles formas de determinar Sólidos de Revolución.



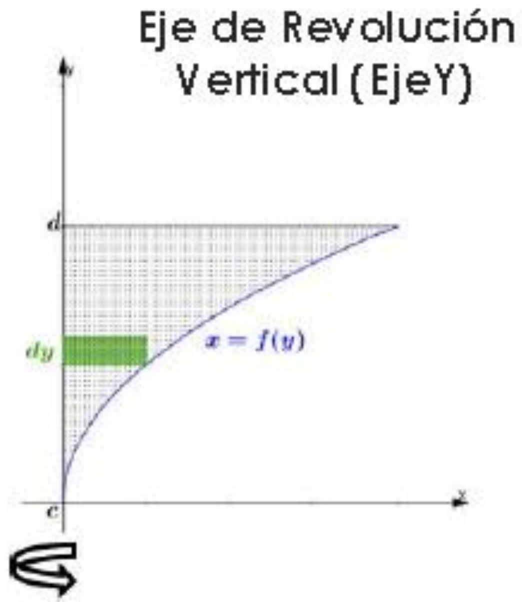
Gráfica 5. Sólidos de revolución

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN



SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

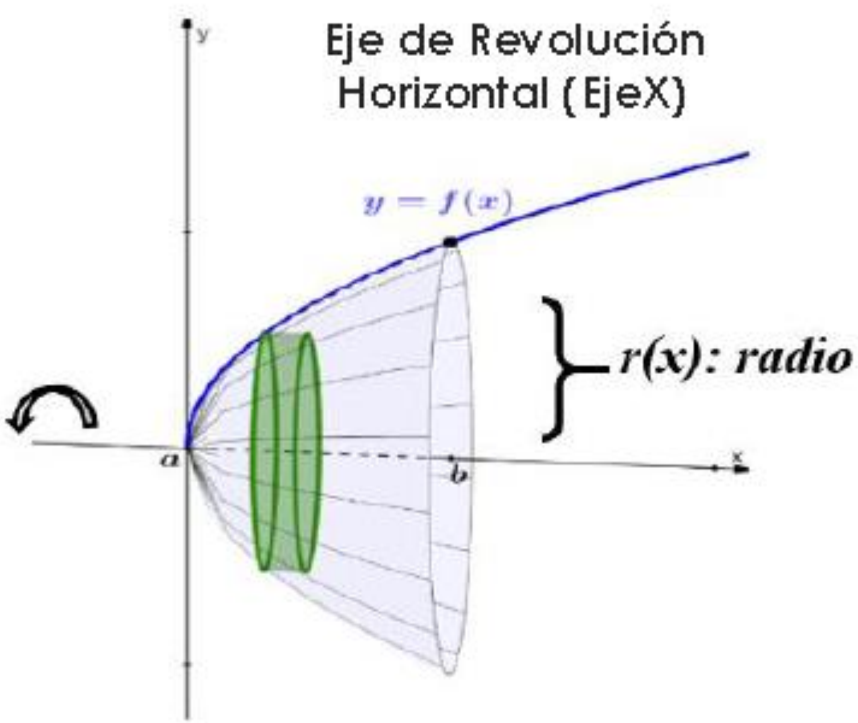
Caso 1. Método de los Discos



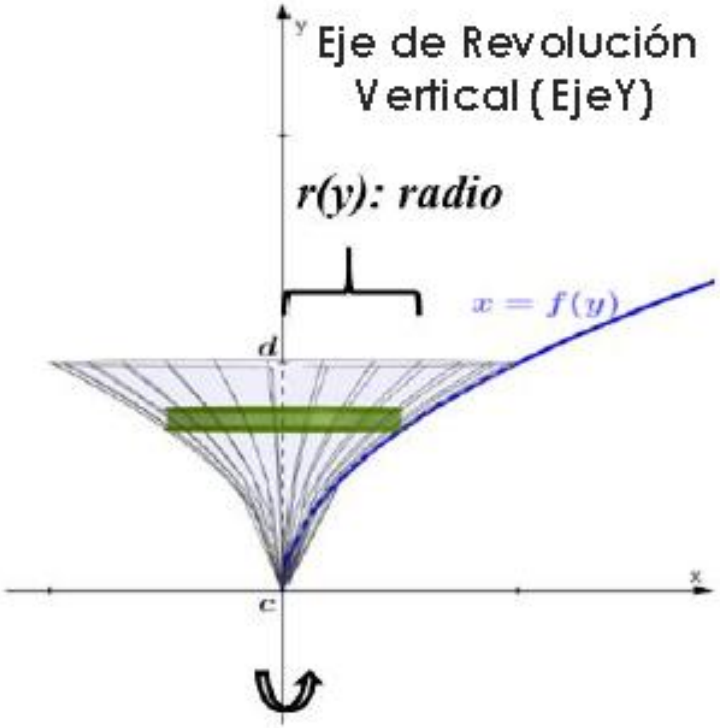
Gráfica 6. Área definida por una función f.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos



Gráfica 7. Sólido de revolución mediante el método de los Discos y eje de revolución horizontal (EjeX)



Gráfica 8. Sólido de revolución mediante el método de los Discos y eje de revolución vertical (EjeY)

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

Primero se considera el Volumen del Disco notado como Volumen de la Partición (Vp) y posteriormente se establece la suma infinita (integral o integrales) en el intervalo dado para encontrar el Volumen total (V) del sólido:

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

El volumen de la partición (Disco) Vp, está dado por la expresión:

$Vp=$ (Área de la cara de la partición) (Ancho de la partición)

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)	**Eje de Revolución Vertical (EjeY)**
$V_p = \pi(r(x))^2dx$	$V_p = \pi(r(y))^2dy$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

El volumen de total del sólido (V), está dado por la expresión:

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)

Si se consideran infinitas particiones (Discos) con ancho dx y radio $r(x)$, se tiene:

$$V = \int_a^b \pi (r(x))^2 dx$$

Eje de Revolución Vertical (EjeY)

Si se consideran infinitas particiones (Discos) con ancho dy y radio $r(y)$, se tiene:

$$V = \int_c^d \pi (r(y))^2 dy$$

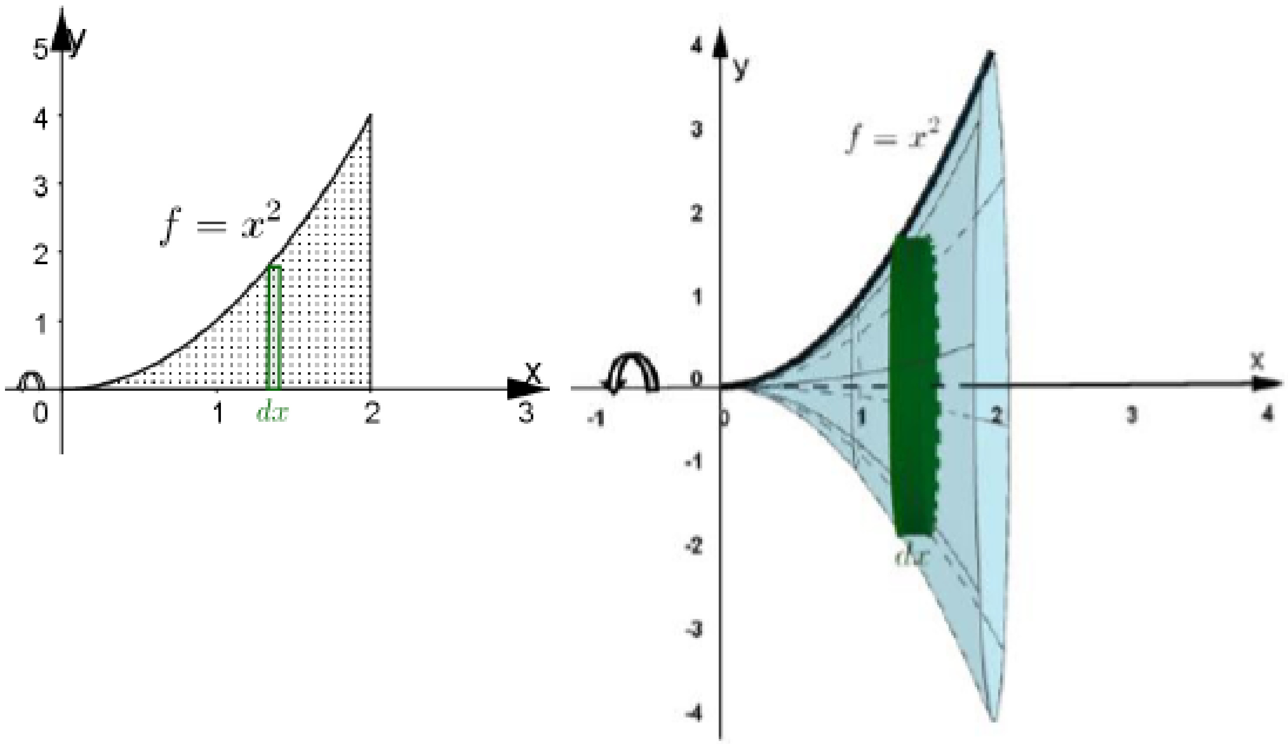
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

Ejemplo 3 En Geogebra

Método de disco alrededor del EjeX: Encontrando el volumen del sólido de revolución (construido al rotar alrededor del EjeX) usando el método de discos.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeX el área definida por: $f(x) = x^2$, el EjeX con $0 \leq x \leq 2$. Usando el método de discos.

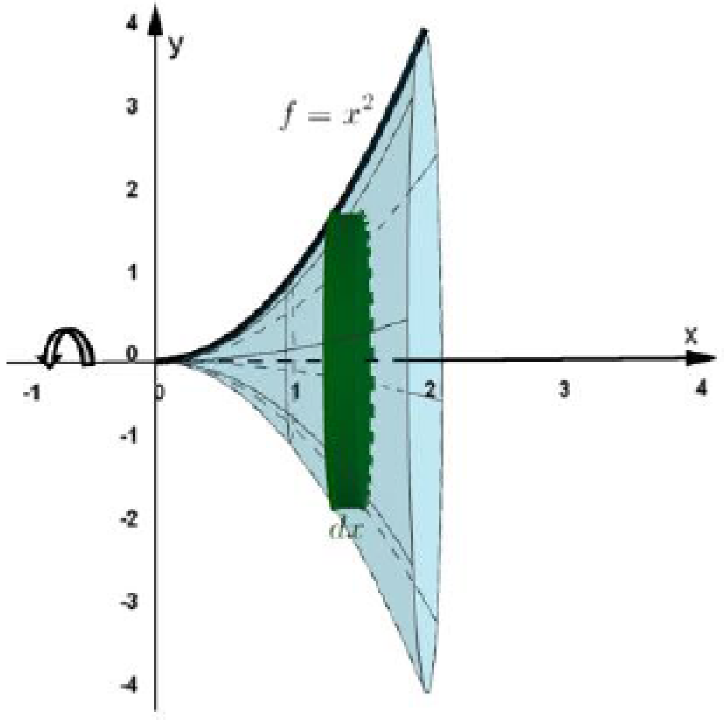


Gráfica 9. Representación gráfica, Ejemplo 3.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. *Método de los Discos*

Ejemplo 3 En Geogebra



Gráfica 9. Representación gráfica, Ejemplo 3.

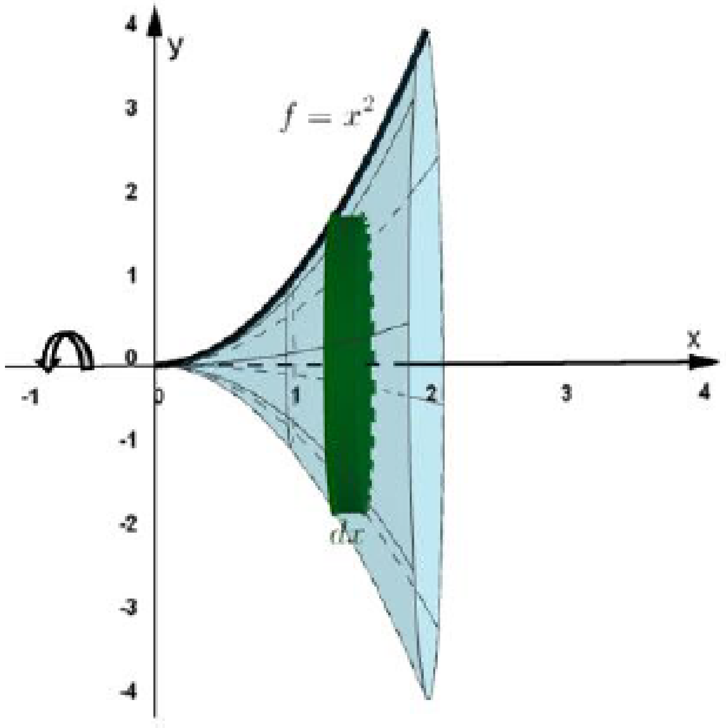
Protocolo de construcción en Geogebra para la Gráfica 9.

Nombre	Instrucción
Función f	$Función(x^2, 0{,}2)$
Superficie a	$Superficie(f, 2\pi, EjeX)$

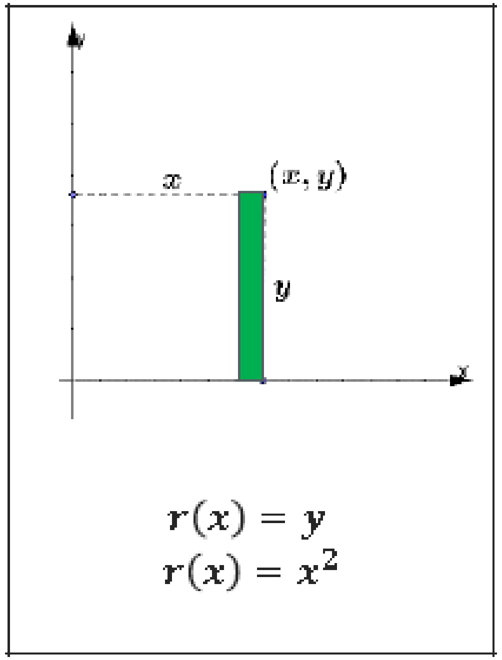
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

Ejemplo 3 En Geogebra



Gráfica 9. Representación gráfica, Ejemplo 3.



$$V = \int_a^b \pi(r(x))^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \pi(x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$V = \frac{32}{5}\pi u^3$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

Nota:

- Sea la región limitada por la curva $y = f(x)$, la recta horizontal $y = k$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Entonces $r(x) = f(x) - k$, es decir:

$$V = \int_a^b \pi(|f(x) - k|)^2 dx$$

- Sea la región limitada por la curva $x = f(y)$, la recta vertical $x = k$ y las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Entonces $r(y) = f(y) - k$, es decir:

$$V = \int_c^d \pi(|f(y) - k|)^2 dy$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 1. Método de los Discos

Ejercicio 2. En Geogebra

Método del disco alrededor del EjeY: Encontrando el volumen de una figura que es rotada alrededor del EjeY, utilizando el método de discos.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeY el área definida por: $f(x) = x^2$, el EjeY con $1 \leq y \leq 4$. Usando el método de los discos.

Ejercicio 3. En Geogebra

Método del disco al rotar alrededor de una recta horizontal: Construcción de un sólido de revolución girando alrededor de una línea que no es un eje cartesiano.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $y = 1$ el área definida por: $f(x) = \sqrt{x}$, la recta $y = 1$ con $1 \leq x \leq 4$. Usando el método de los discos.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Ejercicio 4. En Geogebra

Método del disco al rotar alrededor de una recta vertical: Construcción de un sólido de revolución girando alrededor de una línea que no es un eje cartesiano.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $x = -2$ el área definida por: $f(x) = x^2 - 1$, con $-1 \leq y \leq 3$. Usando el método de los discos.

Ejercicio 5. En Geogebra

Método de discos para la rotación alrededor del EjeX: Encontrar el volumen de un sólido de revolución que está definido entre dos funciones.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeX el área definida por: $y = \sqrt{x}$, $y = x$. En el intervalo definido en el EjeX por $[0,1]$ Usando el método de los discos.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

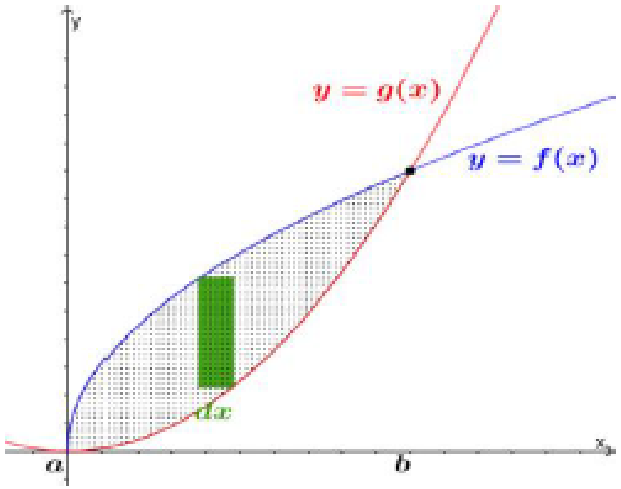
Primero se considera el Volumen del Anillo que puede notarse como el Volumen de la Partición (Vp) y posteriormente se establece la integral o integrales correspondientes en el intervalo dado para encontrar el Volumen (V) total del sólido.

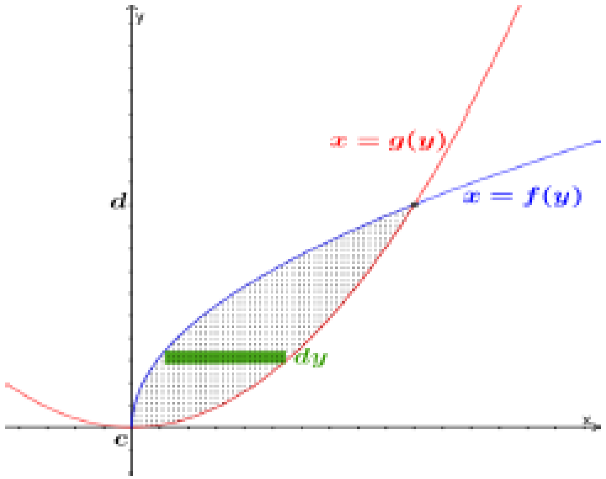
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)

Eje de Revolución Vertical (EjeY)



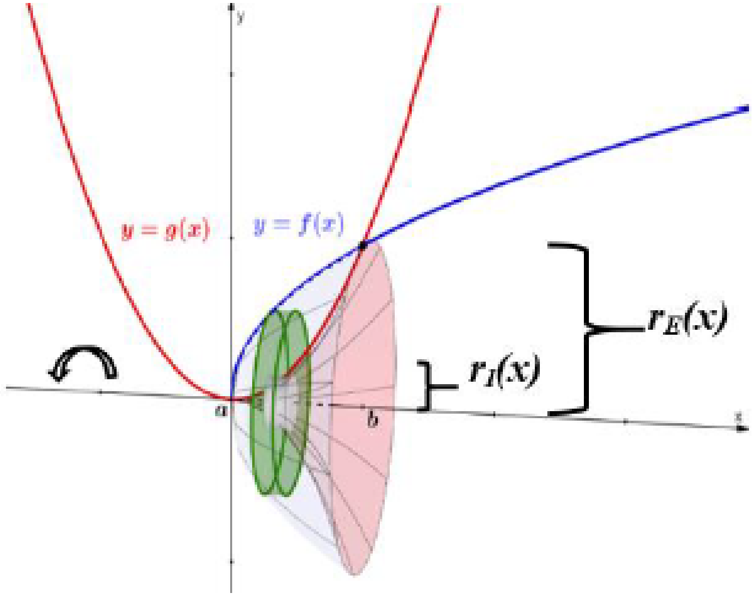


Gráfica 10. Área definida por dos funciones f y g.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

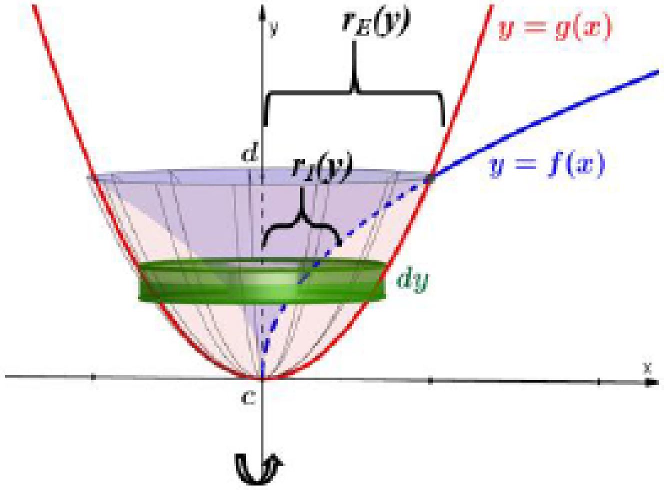
Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)



Gráfica 11. Sólido de revolución mediante el método de los Anillos y eje de revolución horizontal (EjeX).

Eje de Revolución Vertical (EjeY)



Gráfica 12. Sólido de revolución mediante el método de los Anillos y eje de revolución vertical (EjeY).

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

El volumen de la partición Vp, está dada por la expresión:

$V_p =$ (Área de la cara de la partición) (Ancho de la partición)

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)

$$V_p = \pi\left[(r_E(x))^2 - (r_I(x))^2\right]dx$$

$r_E(x)$: Radio Externo.
$r_I(x)$: Radio Interno.

Eje de Revolución Vertical (EjeY)

$$V_p = \pi\left[(r_E(y))^2 - (r_I(y))^2\right]dy$$

$r_E(y)$: Radio Externo.
$r_I(y)$: Radio Interno.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

El volumen de total del sólido (V), está dada por la expresión:

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)

$$V = \int_a^b \pi\left[(r_E(x))^2 - (r_I(x))^2\right]dx$$

Eje de Revolución Vertical (EjeY)

$$V = \int_c^d \pi\left[(r_E(y))^2 - (r_I(y))^2\right]dy$$

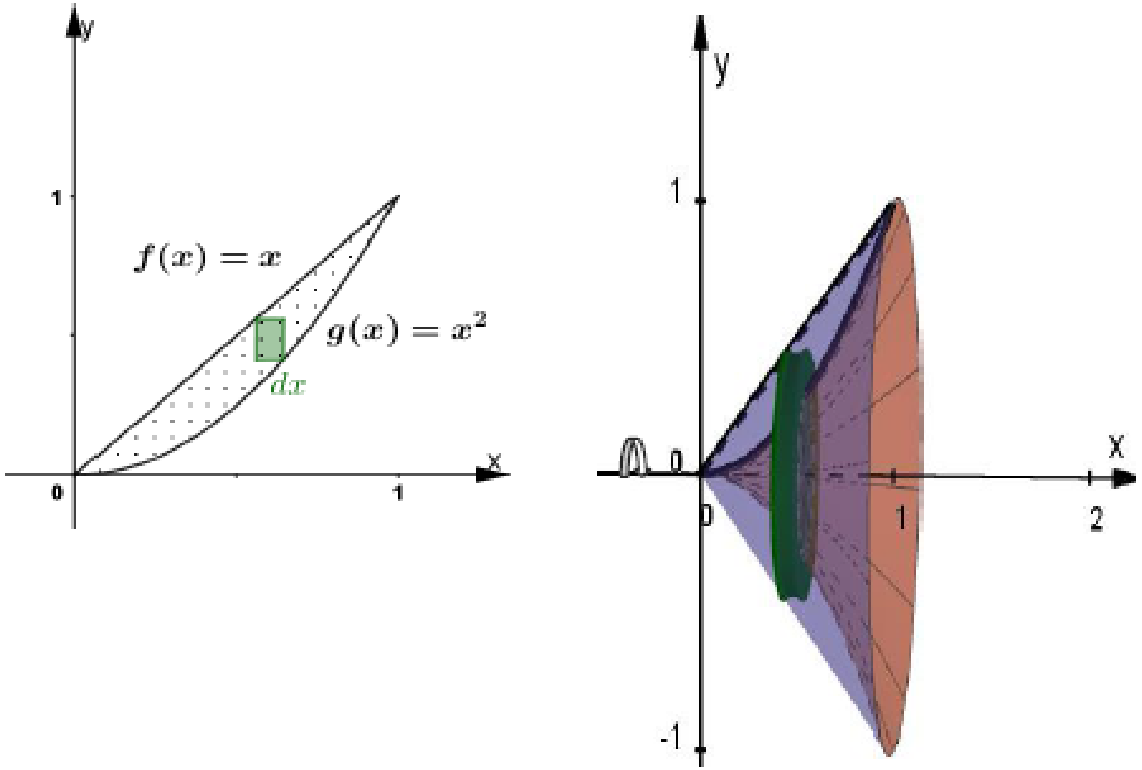
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Ejemplo 4 En Geogebra

Método de los anillos alrededor del EjeX: Encontrando el volumen del sólido de revolución (construido al rotar alrededor del EjeX) usando el método de los anillos.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeX el área definida por: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, el EjeX, con $0 \leq x \leq 1$. Usando el método de los anillos.



Gráfica 13. Representación gráfica, Ejemplo 4.

www.mathspace.jimdo.com - Astrid Alvarez Castro

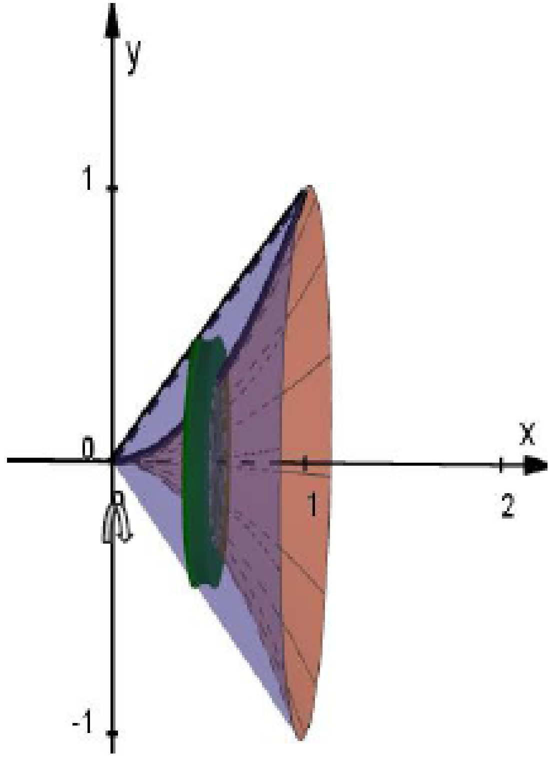
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Ejemplo 4 En Geogebra

Protocolo de construcción en Geogebra
para la Gráfica 13.

Nombre	Instrucción
Función f	$Función(x,0,1)$
Función g	$Función(x^2,0,1)$
Superficie a	$Superficie(f,2\pi,EjeX)$
Superficie b	$Superficie(g,2\pi,EjeX)$

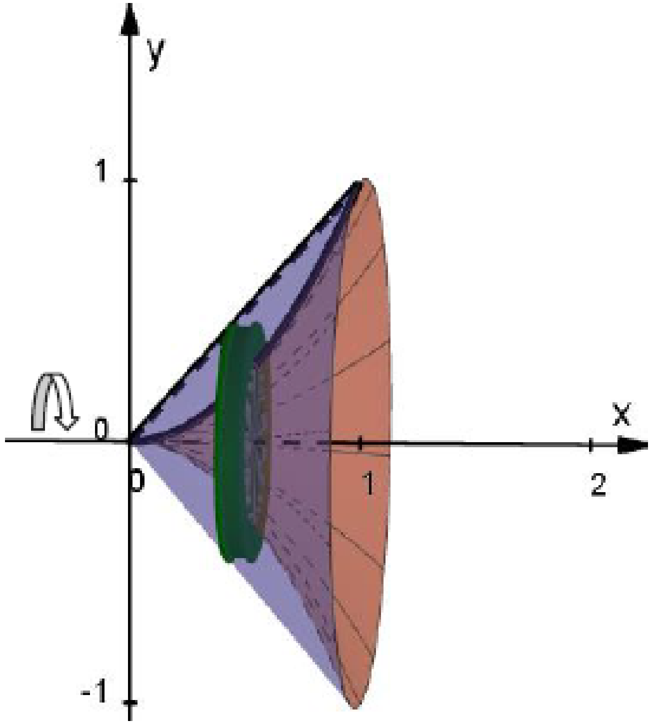


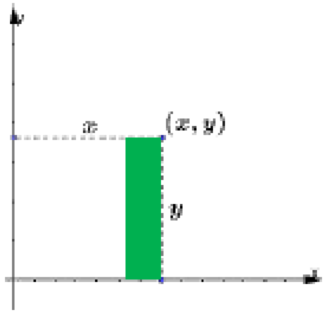
Gráfica 13. Representación gráfica, Ejemplo 4.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Ejemplo 4 En Geogebra





$$r_E(x) = y$$
$$r_E(x) = x$$

$$r_I(x) = y$$
$$r_I(x) = x^2$$

$$V = \int_a^b \pi\left[(r_E(x))^2 - (r_I(x))^2\right]dx$$

$$V = \int_0^1 \pi[(x)^2 - (x^2)^2]dx$$

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - x^4]dx$$

$$V = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$V = \frac{2}{15}\pi u^3$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 2. Método de los Anillos (Arandelas)

Ejercicio 6. En Geogebra

El método de la arandela giratoria alrededor de una recta cualquiera: El método de la arandela giratoria alrededor de una recta paralela al EjeX.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $y = 4$ el área definida por: $y = x$, $y = x^2 - 2x$ con $0 \leq x \leq 3$. Usando el método de los Anillos.

Ejercicio 7. En Geogebra

Método de las arandelas o anillos para la rotación alrededor de una recta vertical: Configuración de la integral definida para encontrar el volumen de un sólido de revolución, alrededor de una línea vertical mediante el método de las arandelas o anillos.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $x = 2$ el área definida por: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$. Usando el método de los Anillos.

Ejercicio 8.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeX el área definida por: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$. Usando el método de los Anillos.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

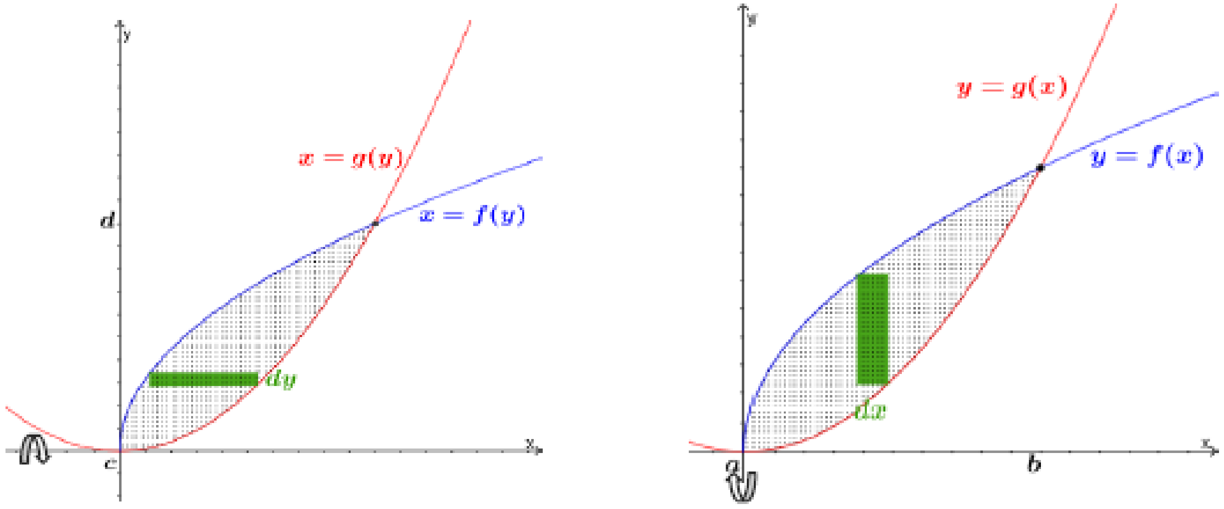
Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Primero se considera el Volumen de la corteza que puede notarse como el Volumen de la Partición ($\boldsymbol{Vp}$) y posteriormente se establece la integral o integrales correspondientes en el intervalo dado para encontrar el Volumen total ($\boldsymbol{V}$) del sólido:

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

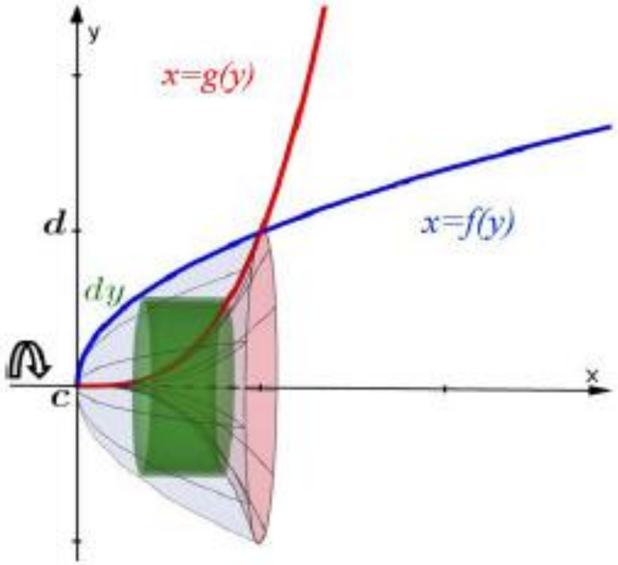
Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funciones derivables que definen un área en el intervalo *dado* tal que $f(x) \geq g(x)$ como muestra la Gráfica 14. Si la región comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$ gira en torno a un eje, se genera un sólido de revolución (Gráficas 15 y 16).



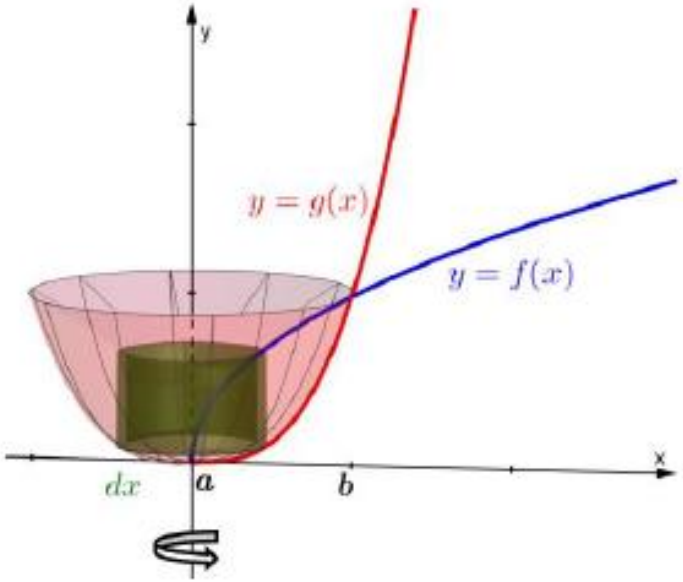
Gráfica 14. Área definida por dos funciones que giran en torno a un eje determinado.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)



Gráfica 15. Sólido de revolución mediante el método de las Capas y eje de revolución horizontal (EjeX).



Gráfica 16. Sólido de revolución mediante el método de las Capas y eje de revolución vertical (EjeY).

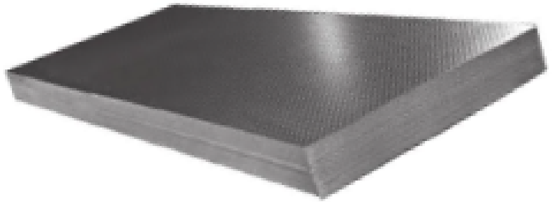
SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

El volumen de la partición Vp, está dada por la expresión:

$V_p =$ (Área de la cara de la partición) (Ancho de la partición)

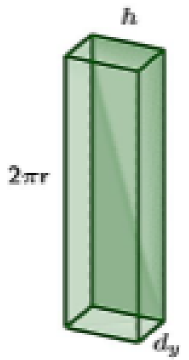
El elemento diferencial generado para cada partición tiene la forma de una corteza. Para determinar V_p, se corta la corteza y se abre con lo que se obtiene un prisma rectangular.



SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Eje de Revolución
Horizontal (EjeX)

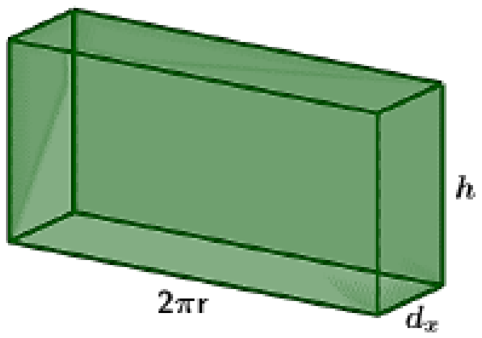


$$V_p = 2\pi r(y)hdy$$

$r(y)$: Radio en función de y

$$V_p = 2\pi r(y)(g(y) - f(y))dy$$

Eje de Revolución
Vertical (EjeY)



$$V_p = 2\pi r(x)hdx$$

$r(x)$: Radio en función de x

$$V_p = 2\pi r(x)(f(x) - gx))dx$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Así, el volumen del sólido (V) en cada caso estaría dado por:

Eje de Revolución Horizontal (EjeX)

$$V = \int_c^d 2\pi r(y)\big(g(y) - f(y)\big)\,dy$$

Eje de Revolución Vertical (EjeY)

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)\big(f(x) - gx)\big)\,dx$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Ejemplo 5 En Geogebra

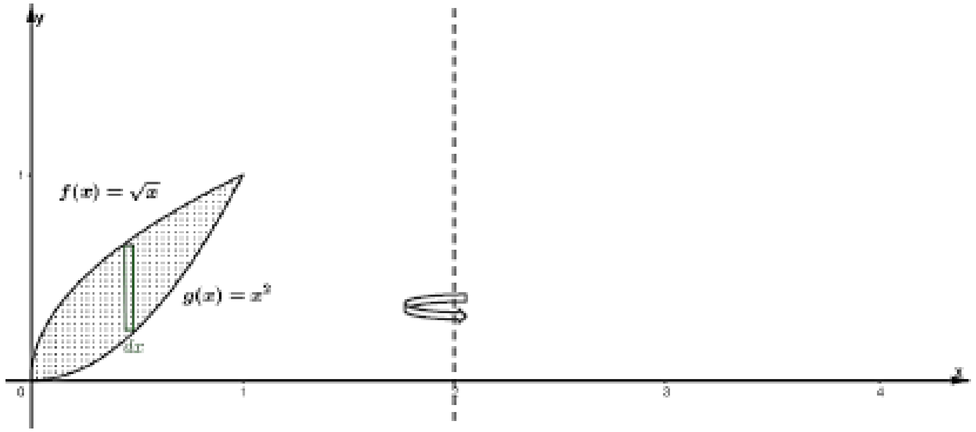
Método de cascarones con dos funciones de x: Utilizando el método de cascarones para rotar alrededor de una línea vertical.

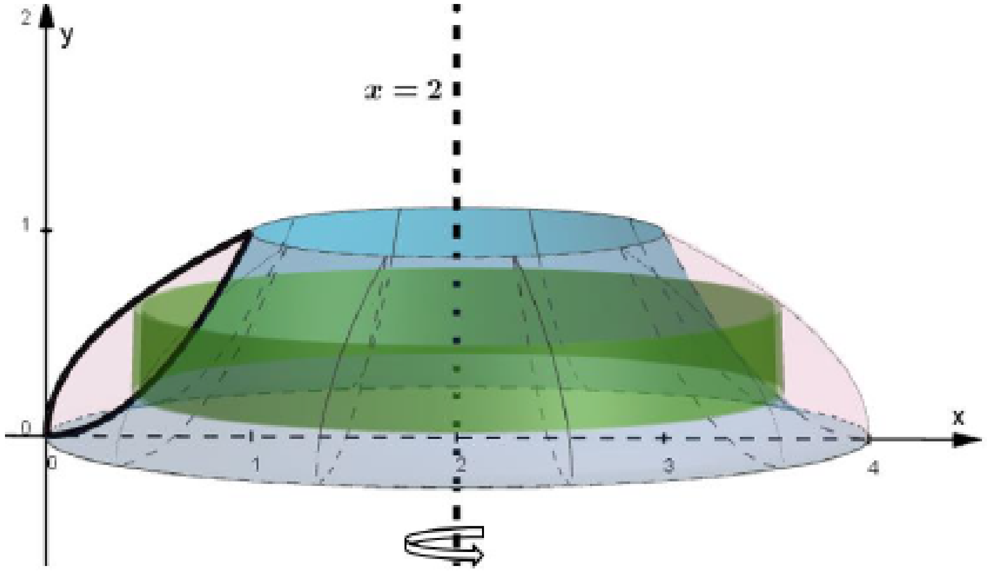
Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $x = 2$ el área definida por: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, con $0 \leq x \leq 1$. Usando el método de los cascarones.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Ejemplo 5 En Geogebra





Gráfica 17. Representación gráfica, Ejemplo 5.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Ejemplo 5 En Geogebra

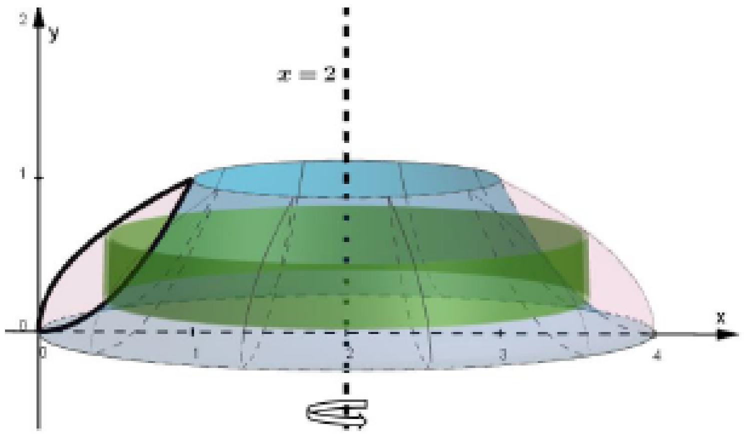
Protocolo de construcción en Geogebra para la Gráfica 17.

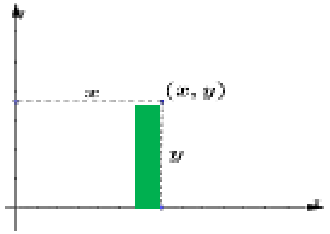
Nombre	Instrucción
Función f	$Función(sqrt(x),0,1)$
Función g	$Función(x^2,0,1)$
ec1	ec1: x=2
Superficie a	$Superficie(f,2\pi,ec1)$
Superficie b	$Superficie(g,2\pi,ec2)$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Ejemplo 5 En Geogebra





$$\boldsymbol{r(x) = 2 - x}$$

$$\boldsymbol{h = f(x) - g(x)}$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{x} - x^2}$$

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)(f(x) - gx))\,dx$$

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)[\sqrt{x} - x^2]dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 [2x^{1/2} - 2x^2 - x^{3/2} + x^3]dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$V = \frac{31}{30}\pi u^3$$

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

Ejercicio 9. En Geogebra

Método de los cascarones para la rotación alrededor de una línea vertical.: Introduciendo el método de los cascarones para la rotación alrededor de una línea vertical.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeY el área definida por: $y = (x-3)^2(x-1)$, con $1 \leq x \leq 3$. Usando el método de los cascarones.

Ejercicio 10. En Geogebra

Método de cascarones rotando alrededor de eje horizontal.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor del EjeX el área definida por: $y = \sqrt[3]{x}$, con $0 \leq x \leq 8$. Usando el método de los cascarones.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

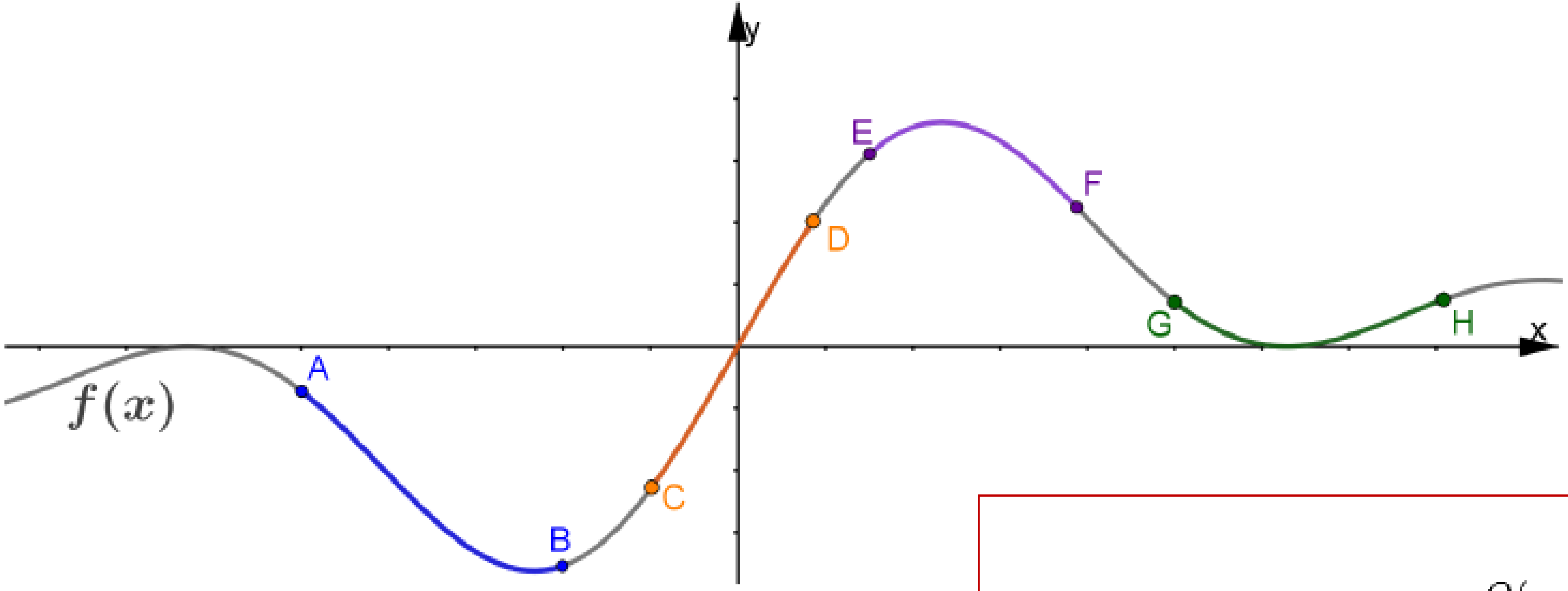
Caso 3. Método de las Cortezas (Capas, Cascarones o Casquillos)

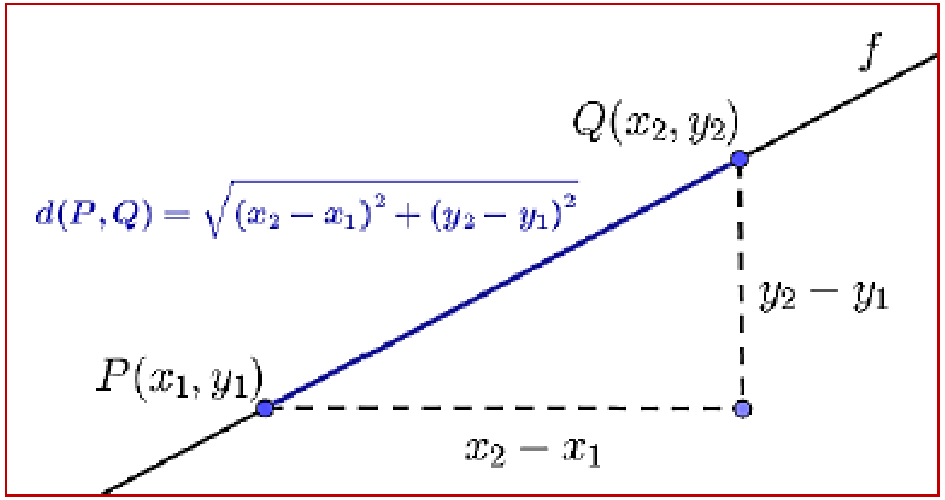
Ejercicio 11. En Geogebra

Método de cascarones con dos funciones de y.

Encontrar el volumen del sólido de revolución construido al rotar alrededor de la recta $y = -2$ el área definida por: $y = x - 1$, $x = (y-1)^2$. Usando el método de los cascarones.

LONGITUD DE ARCO





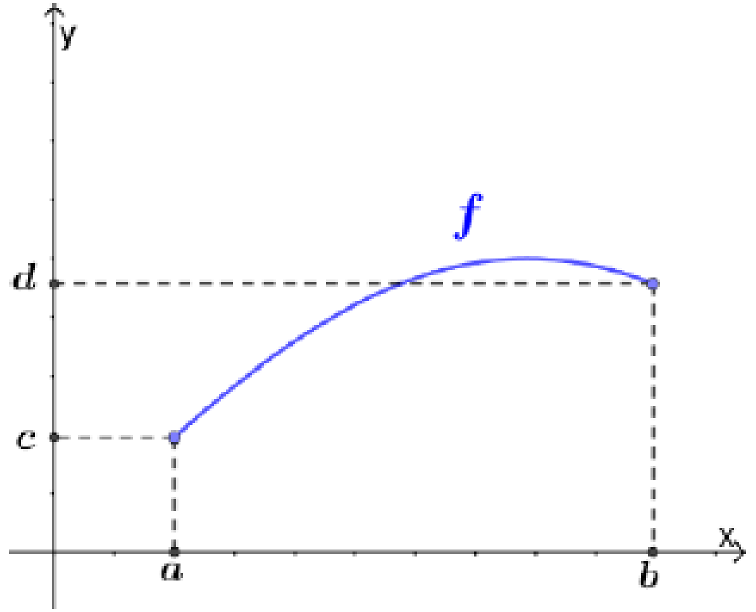
LONGITUD DE ARCO

Sea la gráfica de $y = f(x)$ una curva derivable en el intervalo $[a, b]$, la longitud de arco (s) de la función f entre a y b está dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Análogamente, sea la gráfica de $x = f(y)$ una curva derivable en el intervalo $[c, d]$, la longitud de arco (s) de la función f entre c y d es:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

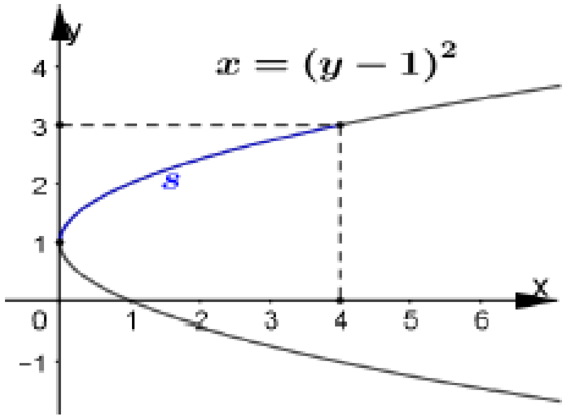


Gráfica 18. Longitud de arco de la función f.

LONGITUD DE ARCO

Ejemplo 6 En Geogebra

Calcular la longitud de arco de la función $x = (y-1)^2$ cuando $1 \leq y \leq 3$. Grafique la función dada.



Gráfica 19. Representación gráfica del ejemplo 5.

• $x = (y-1)^2$ • $\frac{dx}{dy} = 2(y-1)$ • $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 4(y-1)^2$	Considerando $f = x(y)$: $s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ $s = \int_1^3 \sqrt{1 + 4(y-1)^2}\, dy$ $s = 4.65\mathbf{u}$

LONGITUD DE ARCO

Ejercicio 12. En Geogebra

Calcular la longitud de arco de la función $y = x^{3/2}$ cuando $0 \leq x \leq 32/9$. Grafique la función dada.

Ejercicio 13. En Geogebra

Calcular la longitud de arco de la función $9y^2 = 4x^3$ del origen al punto de coordenadas $(3, 2\sqrt{3})$. Grafique la función dada.

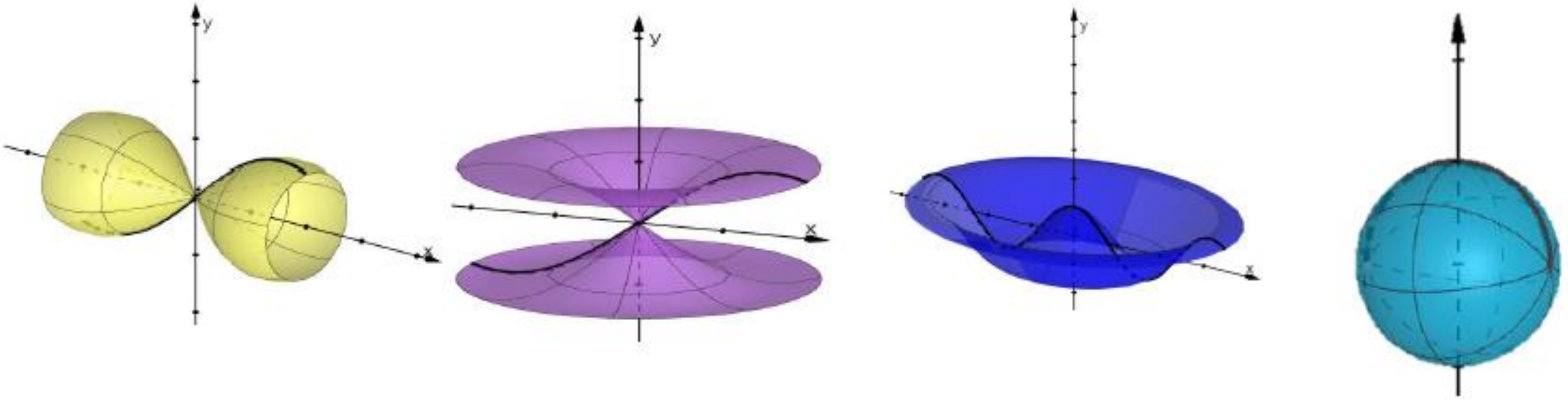
Ejercicio 14. En Geogebra

Calcular la longitud de arco de la función $y = Ln(\cos(x))$ cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

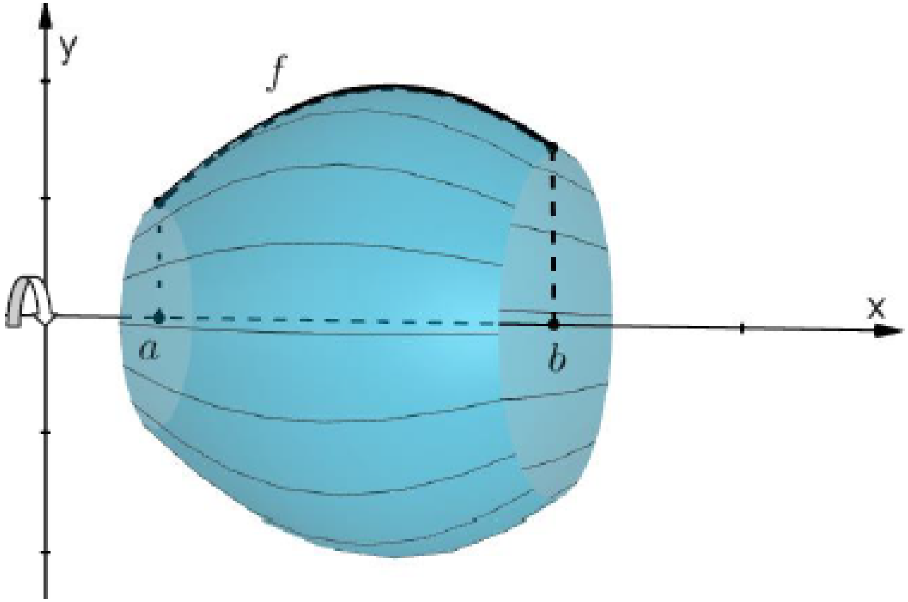
ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Sea f una función con derivada continua en un intervalo dado. El área de la superficie $A(s)$ del sólido de revolución generada al girar la gráfica de f en torno a un eje horizontal o vertical es:



ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

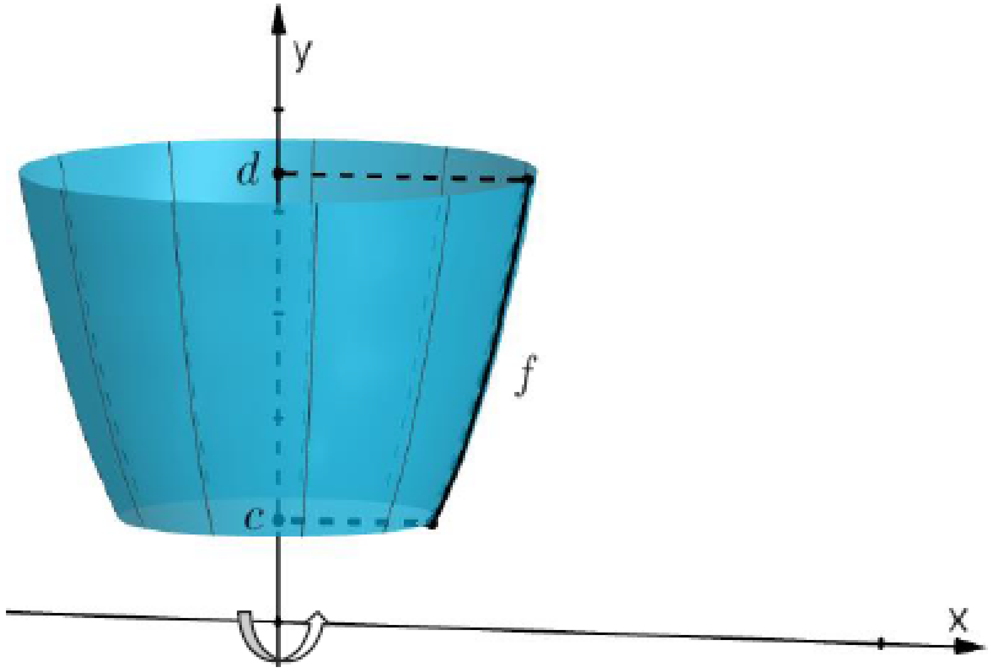


Gráfica 20. Superficie de un sólido que gira en torno al EjeX.

Si $\boldsymbol{y}$ es función de $\boldsymbol{x}$ $(y = \boldsymbol{f(x)})$ definida en el intervalo $[a, b]$, donde $\boldsymbol{r(x)}$ es la distancia entre la gráfica de $\boldsymbol{f}$ y el eje de revolución:

$$A(s) = \int_a^b \mathbf{2\pi} r(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN



Gráfica 21.Superficie de un sólido que gira en torno al EjeY.

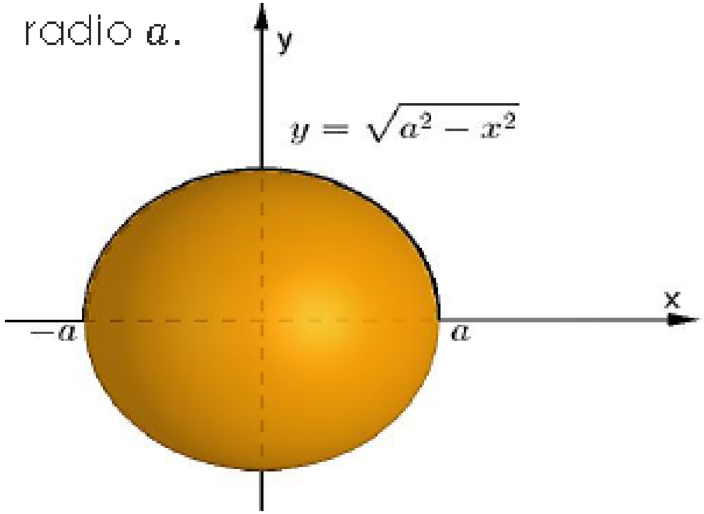
Si x es función de y ($x = f(y)$) definida en el intervalo $[c,d]$, donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución:

$$A(s) = \int_c^d 2\pi r(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Ejemplo 7

Calcular el área de la superficie de una esfera de radio a.



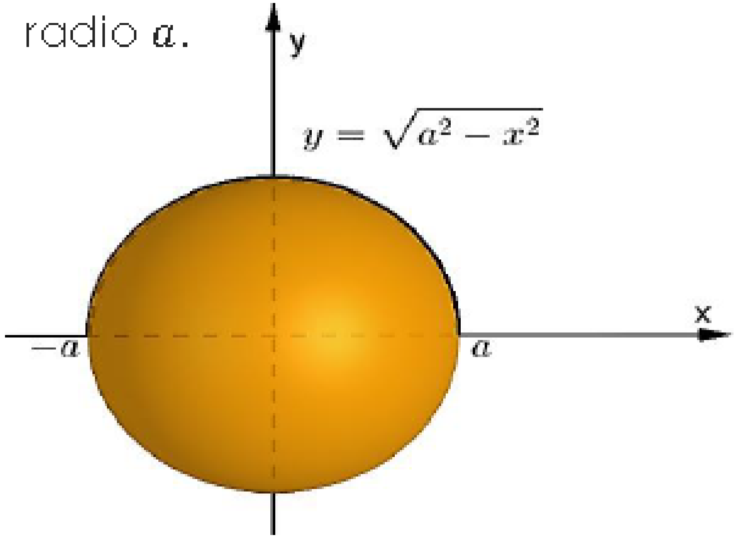
Gráfica 22. Representación gráfica del Ejemplo 7

La superficie de la esfera se genera por rotación alrededor del EjeX, del arco superior de $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[-a, a]$:

ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Ejemplo 7

Calcular el área de la superficie de una esfera de radio a.



Gráfica 22. Representación gráfica del Ejemplo 7

- $r(x) = y$
- $r(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}$

$$A(s) = \int_a^b \mathbf{2\pi} r(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A(s) = \mathbf{2\pi} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$A(s) = \mathbf{4}\pi a^2 \mathbf{u^2}$$

ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Ejercicio 15

Calcule el área de la superficie de revolución generada rotando alrededor del EjeX, el arco de parábola $4ax = y^2$, donde a es una constante positiva, comprendida entre el origen y el punto de coordenadas $(3a, 2\sqrt{3}a)$. Grafique.

Ejercicio 16

Calcule el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^2$ en torno al EjeY. Cuando $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Grafique.

Ejercicio 17

Calcule el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^3$ en torno al EjeX. Cuando $0 \leq x \leq 1$. Grafique.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Si se consideran:

x: Posición de un objeto en movimiento.
v: Razón de cambio de la posición del objeto en movimiento con respecto al tiempo (velocidad).
a: Razón de cambio de la velocidad del objeto en movimiento con respecto al tiempo. (aceleración).

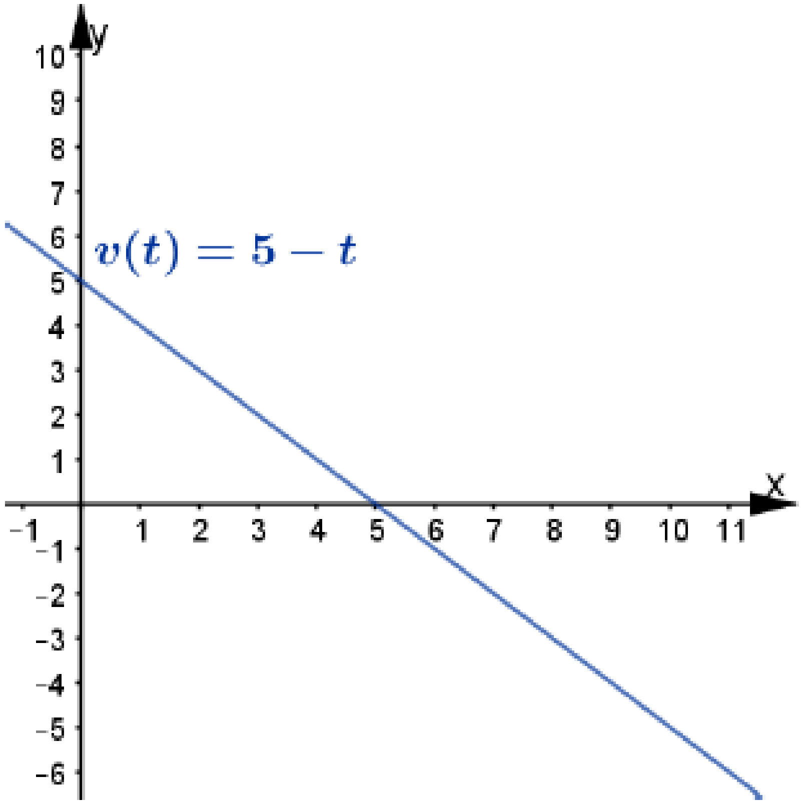
$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{\int v dt = \int \frac{dx}{dt} = x}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad \boxed{\int a dt = \int \frac{dv}{dt} = v}$$

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejemplo 8: Suponga que una partícula se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 5 - t$, metros por segundo.

Determine el desplazamiento de la partícula (cambio en su posición) entre $t = 0$ y $t = 10$ segundos.



INTEGRALES EN CONTEXTO

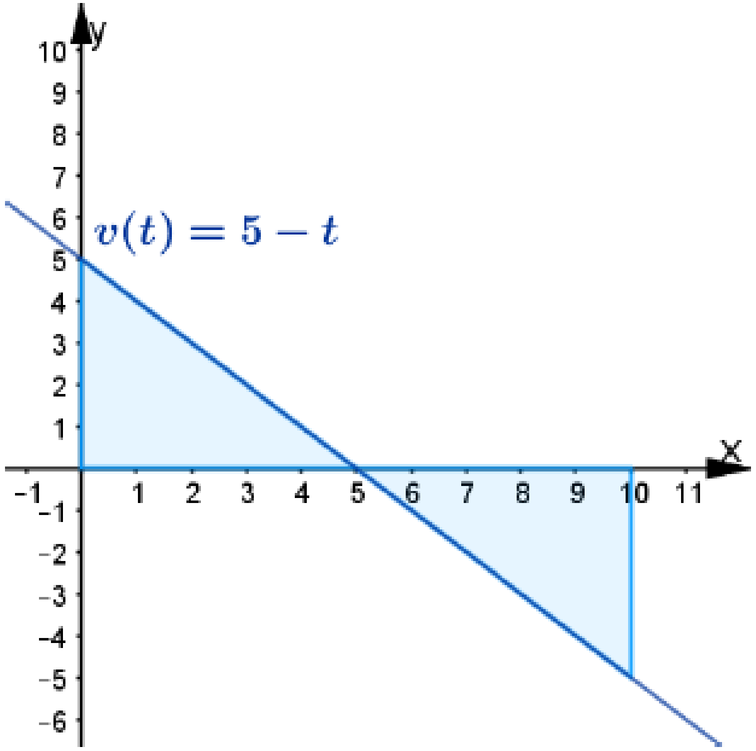
Solución:

Al buscar información al respecto de la posición (x), se debe determinar:

$$\boxed{\int v dt = \int \frac{dx}{dt} = x(t)}$$

Es decir:

$$x(t) = \int_0^{10} v dt = \int_0^{10} (5 - t) dt = 0$$

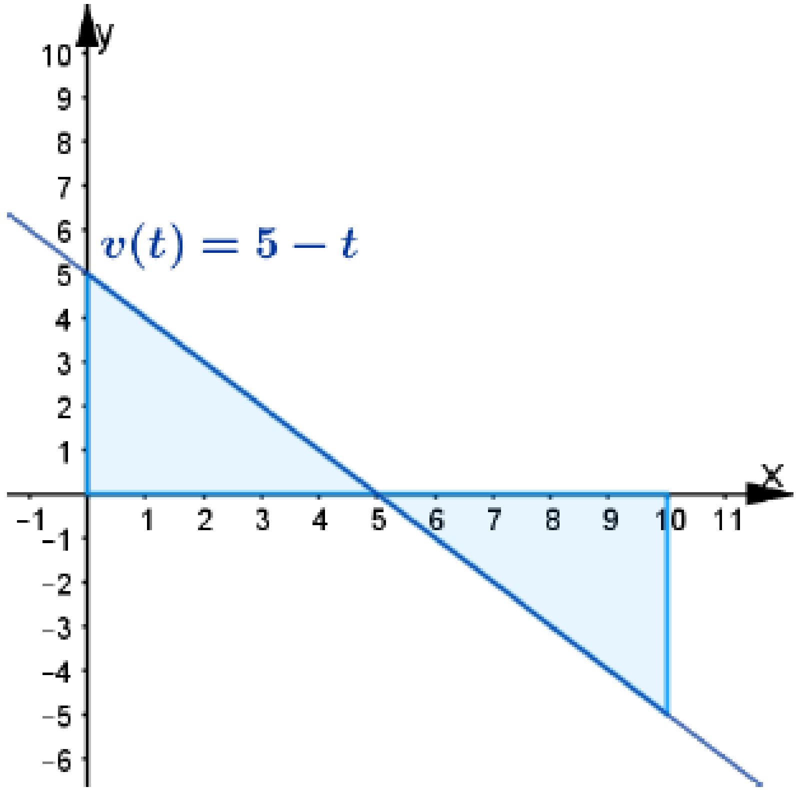


INTEGRALES EN CONTEXTO

Solución:

$$x(t) = \int_0^{10} v\,dt = \int_0^{10} (5-t)\,dt = 0$$

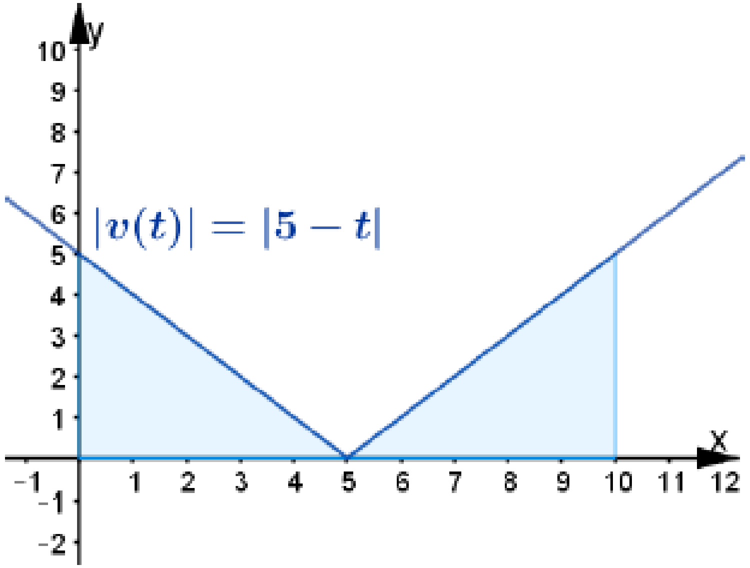
El desplazamiento $x(t) = 0$ significa que la partícula ocupa la misma posición cuando $t = 0$ y $t = 10$ segundos. Esto significa que la partícula vuelve a la posición inicial.



INTEGRALES EN CONTEXTO

Solución:

Si se quiere encontrar la distancia total recorrida por la partícula, en lugar de trabajar con la velocidad, se determina su rapidez, es decir el valor absoluto de la velocidad $|v|$.



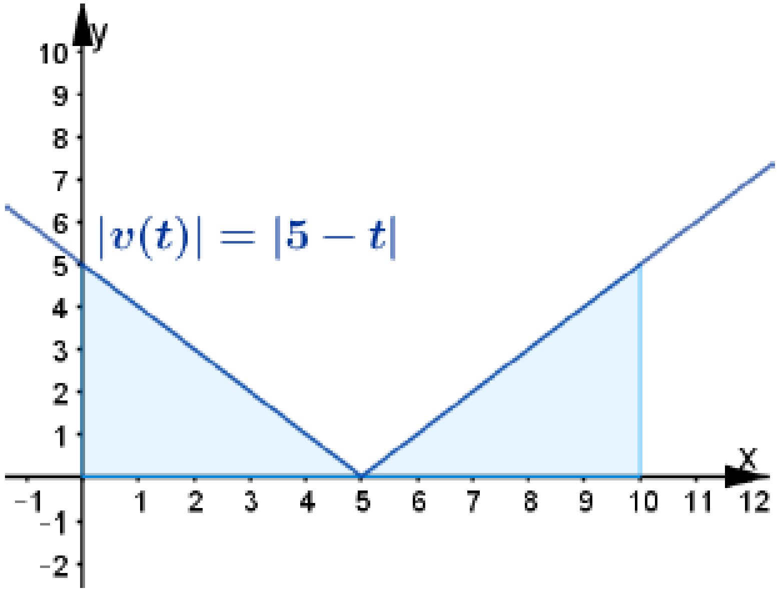
Rapidez: Qué tan rápido va la partícula.
Velocidad: Qué tan rápido va la partícula y en qué dirección.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Solución:

$$\int_0^{10} |v|dt = \int_0^{10} |5-t|dt = 25$$

Esto quiere decir que entre 0 y 10 segundos, la partícula recorrió una distancia de 25m.



INTEGRALES EN CONTEXTO

Clase	Pregunta típica	Expresión apropiada
Desplazamiento	"¿Cuál es el desplazamiento de la partícula entre... y...?" o "¿Cuál es el cambio en la posición de la partícula entre... y...?"	$\int_a^b v(t)\,dt$
Distancia total	"¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre... y...?"	$\int_a^b \lvert v(t) \rvert\,dt$
Posición real	"¿Cuál es la posición de la partícula en...?"	$C + \int_a^b v(t)\,dt$, donde C es la condición inicial.

Fuente: Khan Academy

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 18: Suponga que una partícula se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 8 - t^2$, metros por segundo.

En $t = 2$, la distancia de la partícula al punto inicial era de 5m.

a. Determine el desplazamiento de la partícula (cambio en su posición) entre $t = 2$ y $t = 6$ segundos.

b. Determine la distancia total recorrida de la partícula entre $t = 2$ y $t = 6$ segundos.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 19: Suponga que una partícula se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = \sqrt{3t-1}$, metros por segundo.

En $t = 2$, la distancia de la partícula al punto inicial era de 8m en la dirección positiva.

Determine la posición de la partícula cuando $t = 7$ segundos.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejemplo 9: Suponga que una partícula se mueve con una aceleración de $1m/s^2$.

A los 3 segundos, la *velocidad* de la partícula es de $-\frac{3m}{s}$.
A los 2 segundos la *posición* de la partícula es de -10m.

a. Determine una ecuación para la velocidad de la partícula.
b. Determine una ecuación para la posición de la partícula.

Solución:
a.

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$v(t) = \int 1dt$$

$$v(t) = t + c_1$$

Dado que $v(3) = -3$

Entonces:

$$v(3) = 3 + c_1 = -3$$

Luego:

$$c_1 = -6$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{v(t) = t - 6}$$

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejemplo 9: Suponga que una partícula se mueve con una aceleración de $1m/s^2$.

A los 3 segundos, la *velocidad* de la partícula es de $-\frac{3m}{s}$.
A los 2 segundos la *posición* de la partícula es de -10m.

a. Determine una ecuación para la velocidad de la partícula.
b. Determine una ecuación para la posición de la partícula.

Solución:
b.

$$x(t) = \int v(t)dt$$

$$x(t) = \int (t-6)dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + c_2$$

Dado que $x(2) = -10$

Entonces:

$$x(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + c_2 = -10$$

Luego:

$$c_2 = 0$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t}$$

INTEGRALES EN CONTEXTO

Teorema del Valor Medio para Integrales

Ejemplo 10:

Determine la *aceleración promedio* entre $t = 1$ y $t = 2$ segundos para una partícula cuya posición en metros está dada por la expresión: $s(t) = \frac{t^3+2}{t^2}$.

Solución:

- $s(t) = \frac{t^3+2}{t^2}$
  $s(t) = t + 2t^{-2}$

- $v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$

  $v(t) = \frac{d}{dt}(t + 2t^{-2})$
  $v(t) = 1 - 4t^{-3}$

- $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$
  $a(t) = \frac{d}{dt}(1 - 4t^{-3})$
  $a(t) = 12t^{-4}$

$$a_{prom} = \frac{1}{2-1}\int_1^2 12t^{-4}dt$$

$$a_{prom} = \frac{7}{2}\ m/s^2$$

INTEGRALES EN CONTEXTO

Teorema del Valor Medio para Integrales

Ejercicio 20: Si la población mundial actual (año 2021) es 7.8 mil millones y la población dentro de t años está dada por la ley de crecimiento exponencial:

$$P(t) = 7.8e^{0.023t}.$$

Determine la población promedio de la tierra en los próximos 20 años.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Teorema del Valor Medio para Integrales

Ejercicio 21: Si se inyecta una dosis de 2 ml de medicamento en un bovino. La cantidad de medicamento que queda en la sangre después de t horas está dada por la expresión:

$$m(t) = 2e^{-0.32t}.$$

Determine la cantidad promedio de medicamento en el torrente sanguíneo del animal durante la segunda hora.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 22: Si una sustancia fluye en un tanque de almacenamiento a razón de

$$r(t) = 180 + 3t$$

litros por minuto. Cuando $t = 0$ hasta $t = 60$ minutos.

Determine:

a. La expresión que determina la cantidad de sustancia en el tanque para el tiempo t.
b. La cantidad de sustancia que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 23: Si una partícula se mueve con una velocidad que corresponde a la expresión:

$$v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$$

pies/seg.

Determine:

a. El desplazamiento de la partícula entre 1 y 5 segundos.
b. La distancia total recorrida por la partícula entre 1 y 5 segundos.

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 24: Si la razón de cambio $(i'(p))$ del ingreso financiero $((i(p))$ de una compañía de transporte intermunicipal depende del precio del tiquete p y está dado por:

$$i'(p) = 300 - 12p$$

Si al vender tiquetes de $15.000 se obtiene un ingreso de $3.150.000

Determine:

¿Cuál es el ingreso de la compañía de transportes al vender tiquetes de $10.000?

INTEGRALES EN CONTEXTO

Ejercicio 25: Si la razón de cambio $(c'(x))$ de la concentración e ozono contaminante $(c(x))$ desde el primero de enero de 1990, en cierta población está dada por la expresión:

$$c'(x) = -1.2x + 15.$$

(Para el primero de enero de 1992 la concentración de ozono contaminante fue de $39{,}6\mu g/m^3$).

Determine:

a. ¿Cuál fue la concentración de ozono contaminante en el año 2000?
b. Si la OMS (Organización Mundial de la Salud) en el año 2005 consideró que cuando las concentraciones de ozono contaminante durante ocho horas son superiores a $240\mu g/m^3$ existe la posibilidad de efectos significativos en la salud. Según los datos de este ejercicio. ¿Pueden haber daños significativos en la salud de los habitantes de la población si se exponen durante el tiempo estimado?