INTEGRAL DEFINIDA

TEORÍA

ASTRID ALVAREZ CASTRO
WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

INTRODUCCIÓN

Facultad de Ciencias Agrarias-Unicauca. Foto: Astrid Álvarez C.

SUMAS Y NOTACIÓN SIGMA

https://youtu.be/r-nHLIldLYY

Notación: La suma de los n términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se denota por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Donde i se llama índice de la suma, a_i es el $i-ésimo$ término de la suma, además 1 y n son los *límites inferior* y *superior* respectivamente.

El límite inferior no tiene por qué ser 1, pero ambos deben ser constantes con respecto al índice de la suma.

SUMAS Y NOTACIÓN SIGMA

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6 = 21.$

2. $\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$

3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2+1) = \frac{1}{n}(1^2+1) + \frac{1}{n}(2^2+1) + \frac{1}{n}(3^2+1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2+1)$

PROPIEDADES DE LINEALIDAD

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$.

2. $\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$. $k \in \mathbb{R}$.

TEOREMA

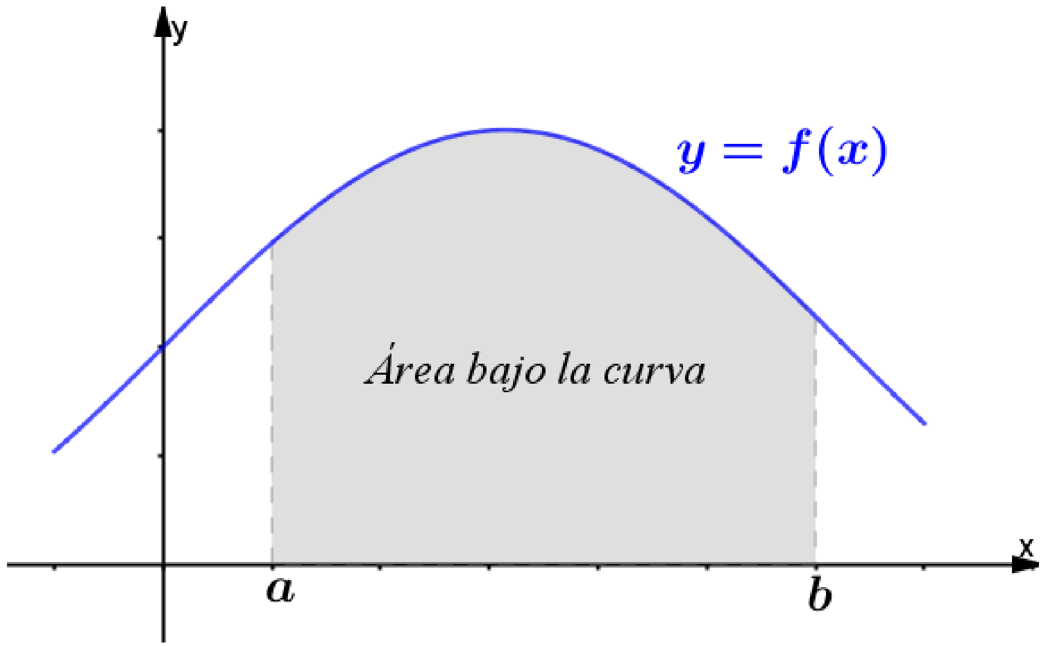
1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn;$ $\quad c: constante.$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

TEOREMA

Ejercicios:

1. $\sum_{i=1}^{5} i^2$
2. $\sum_{j=1}^{9} \left(\frac{j^4}{2} + 7\right)$
3. $\sum_{i=0}^{5} i^2$
4. $\sum_{i=1}^{6} \frac{i^3+2}{a}; \quad a \ es \ constante.$

EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA



Área bajo la curva o área definida entre una función y un eje determinado

El tipo de región más simple con el que nos podemos encontrar es un rectángulo. Se sabe que el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura. A partir de la definición del área de una figura sencilla como la del rectángulo se pueden determinar áreas de regiones que no son tan sencillas.

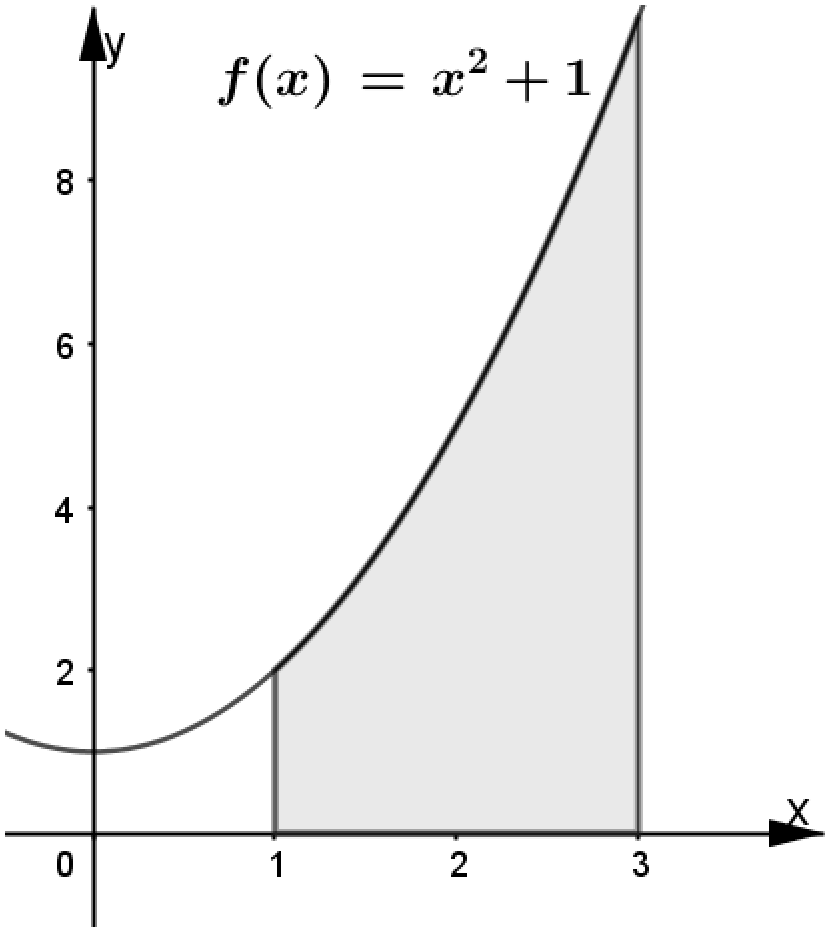
De esta manera, se trata de aproximar la región buscada mediante la suma de las áreas de "pequeños" rectángulos (n) en un intervalo $[a, b]$ (a: Límite inferior, b:Límite Superior) para la función dada $y = f(x)$.

Para entender la idea del método se puede ver el siguiente ejemplo.

EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

Ejemplo:
https://youtu.be/W1IPtvVWCr8

Determine una aproximación del área definida por la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1,3]$. Con 4 rectángulos igualmente espaciados.



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

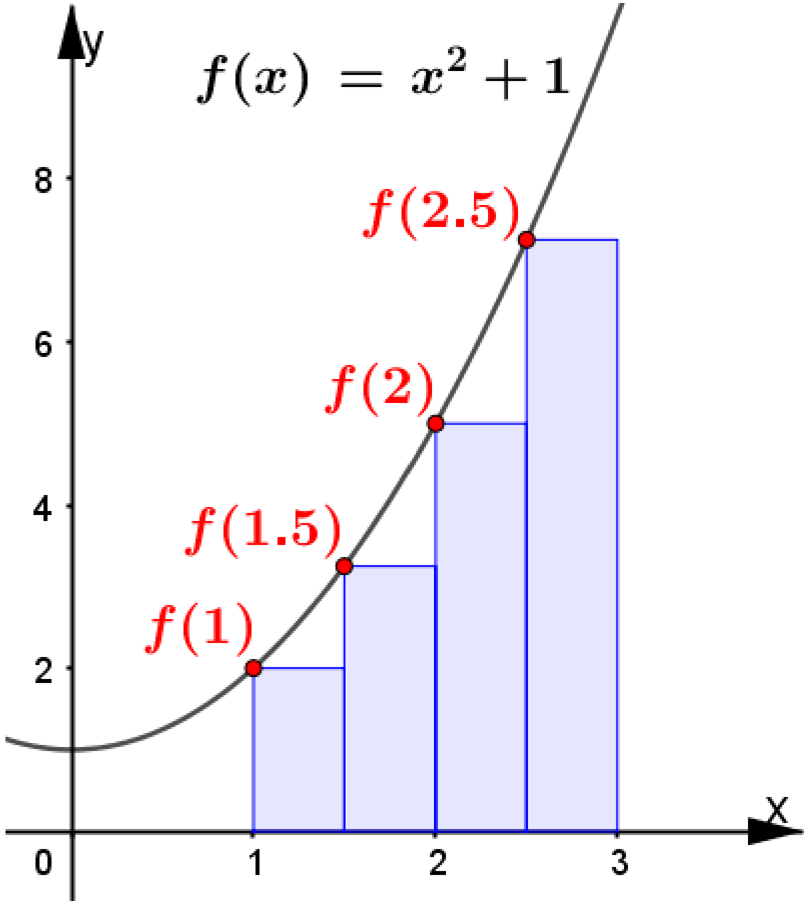
Ejemplo:

- Se construyen 4 rectángulos que abarquen el área pedida (Por la izquierda).
- Se determina el ancho de cada rectángulo (denotado como Δ_x), donde n es el número de rectángulos.

$$\Delta_x = \frac{Límite\ Superior - Límite\ Inferior}{n}$$

$$\Delta_x = \frac{3-1}{4}$$

$$\Delta_x = \frac{1}{2}$$



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

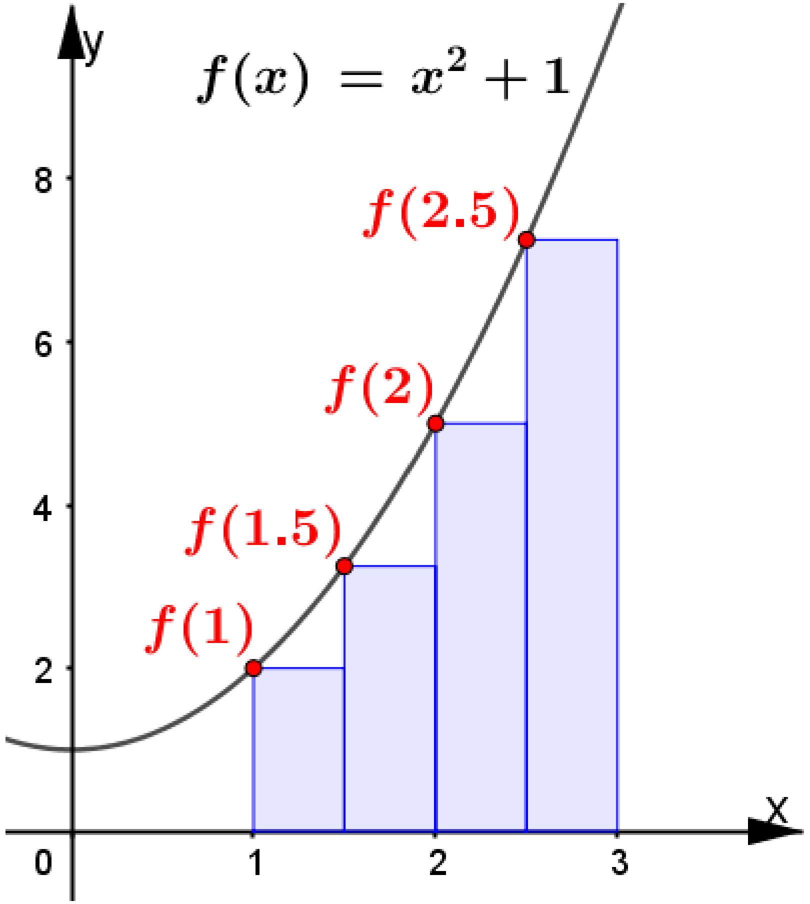
Ejemplo:

De esta manera:

Área aproximada = $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
Área aproximada = $f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + f(x_4)\Delta_x$
Área aproximada = $f(1)\frac{1}{2} + f(1.5)\frac{1}{2} + f(2)\frac{1}{2} + f(2.5)\frac{1}{2}$
Área aproximada = $(2)\frac{1}{2} + (3.25)\frac{1}{2} + (5)\frac{1}{2} + (7.25)\frac{1}{2}$

Área aproximada = $8.75u^2$

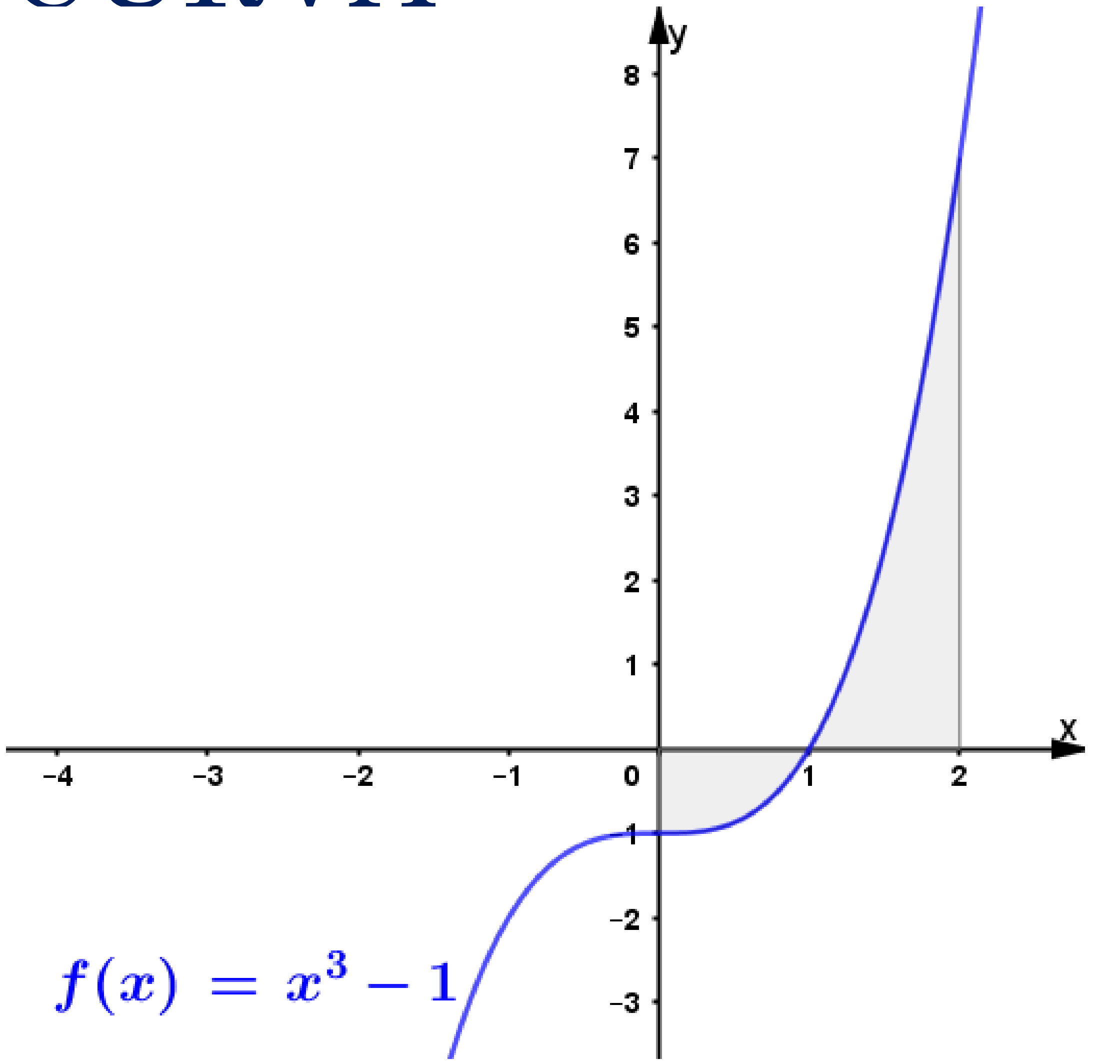
A_i: *Área del rectángulo* $i -$ *ésimo*. $i = 1,2,3,4.$



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

Ejemplo:

Determine una aproximación del área definida por la función $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo [0,2]. Con 4 rectángulos igualmente espaciados.



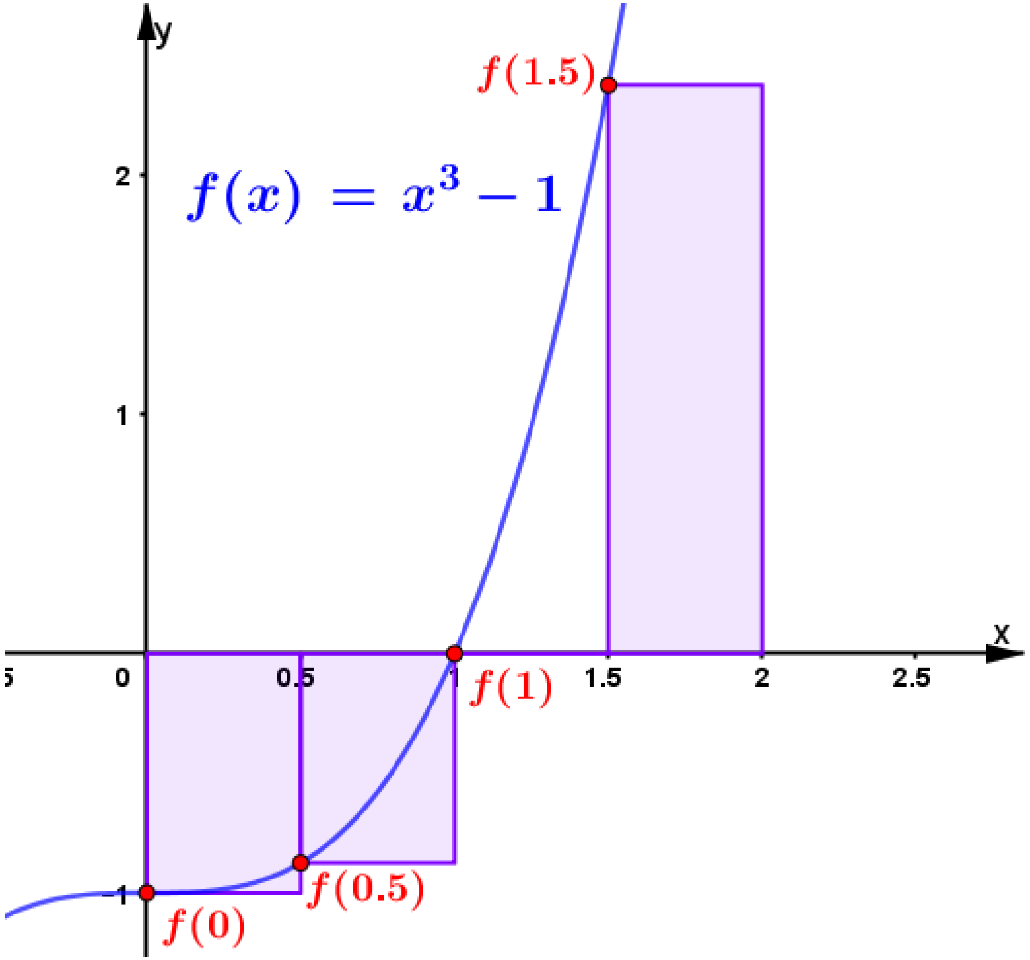
EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

Ejemplo:

- Se construyen 4 rectángulos que abarquen el área pedida (Por la izquierda).

- Se determina el ancho de cada rectángulo (denotado como Δ_x), donde n es el número de rectángulos.

$$\Delta_x = \frac{1}{2}$$

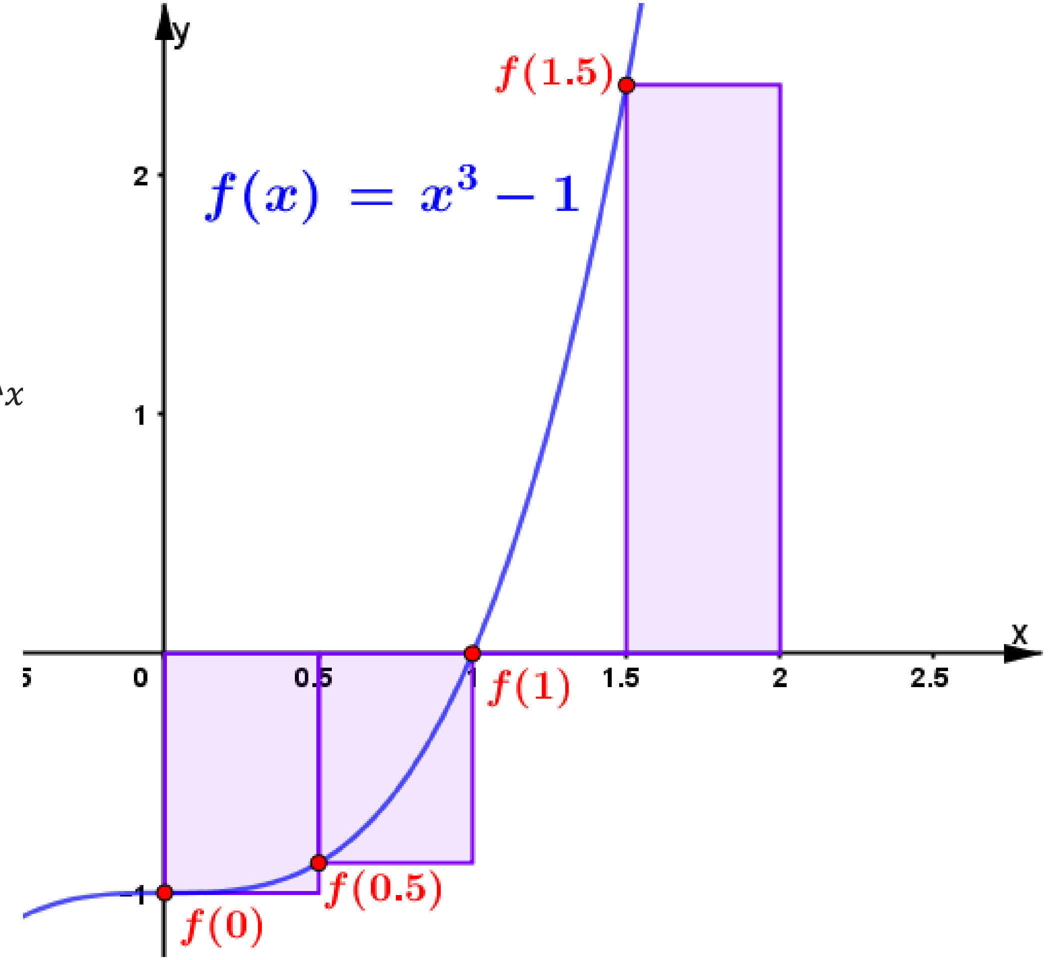


EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

Ejemplo:

De esta manera:

Área aproximada = $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
Área aproximada = $f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + f(x_4)\Delta_x$

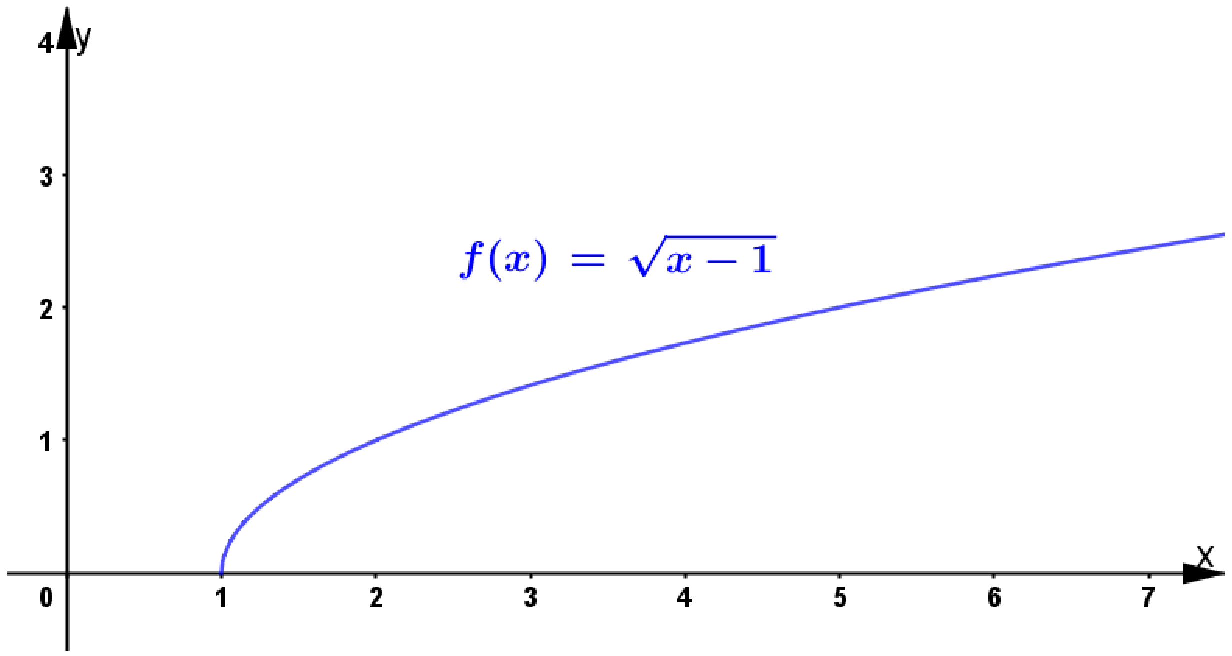


EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

Ejercicio:

Hallar una aproximación del área bajo la curva de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en el intervalo $[1,6]$, mediante 5 rectángulos igualmente espaciados.

Usar el método aprendido en los ejemplos anteriores y verificar sus resultados con las instrucciones en GeoGebra que se dan a continuación. Haga siempre las representaciones gráficas en cada caso.



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

1. Por la izquierda.

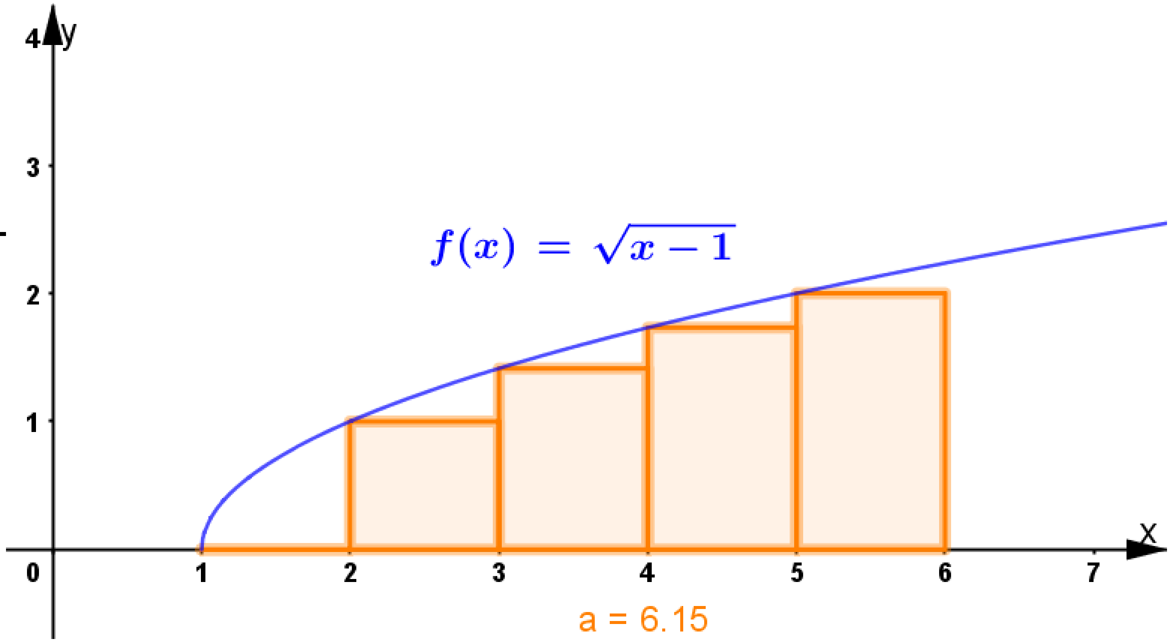
Con la instrucción:

SumaIzquierda[<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>]

Que para este caso sería:

SumaIzquierda[sqrt(x-1), 1,6,5]

Obtiene el siguiente resultado: 6.15.



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

2. Por la derecha.

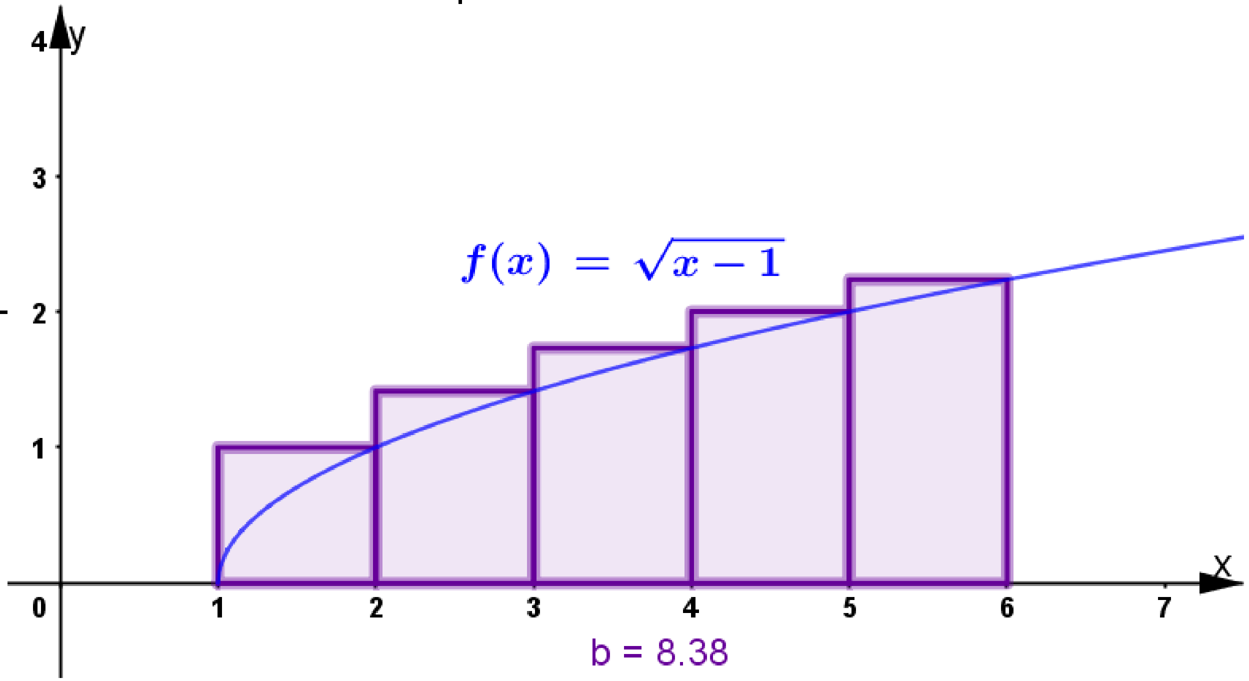
Con la instrucción:

SumaRectángulos[<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>, <Posición del rectángulo inicial>]

Que para este caso sería:

SumaRectángulos[sqrt(x-1), 1,6,5,1]

Obtiene el siguiente resultado: 8.38.



EL PROBLEMA DE HALLAR EL ÁREA BAJO LA CURVA

3. Mediante el método de los trapecios.

https://youtu.be/w7pkzRcWLm0

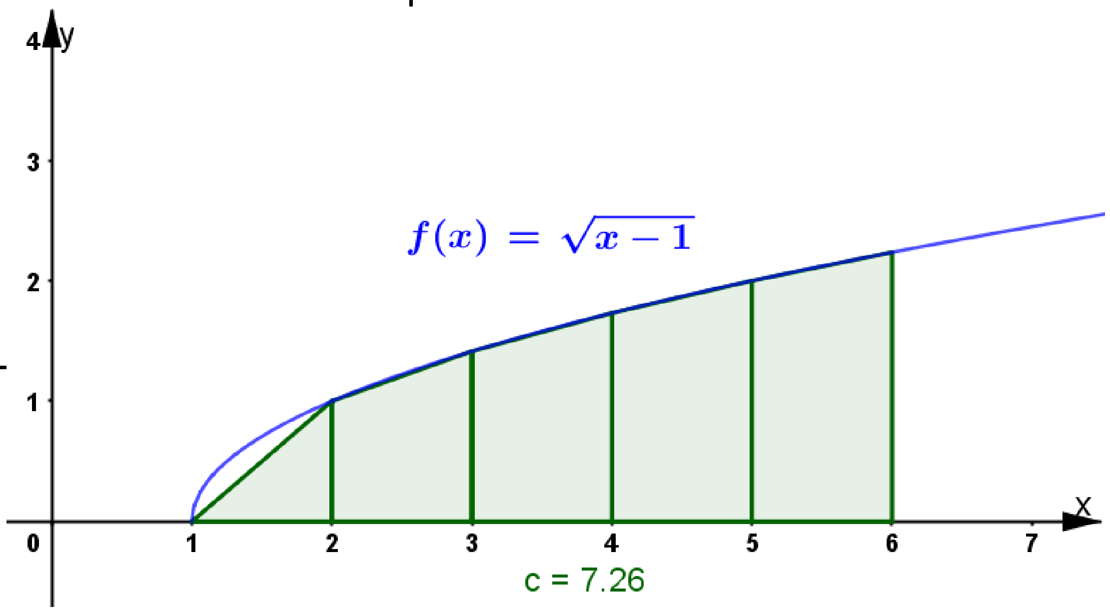
Con la instrucción:

SumaTrapezoidal[<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de trapezoides>]

Que para este caso sería:

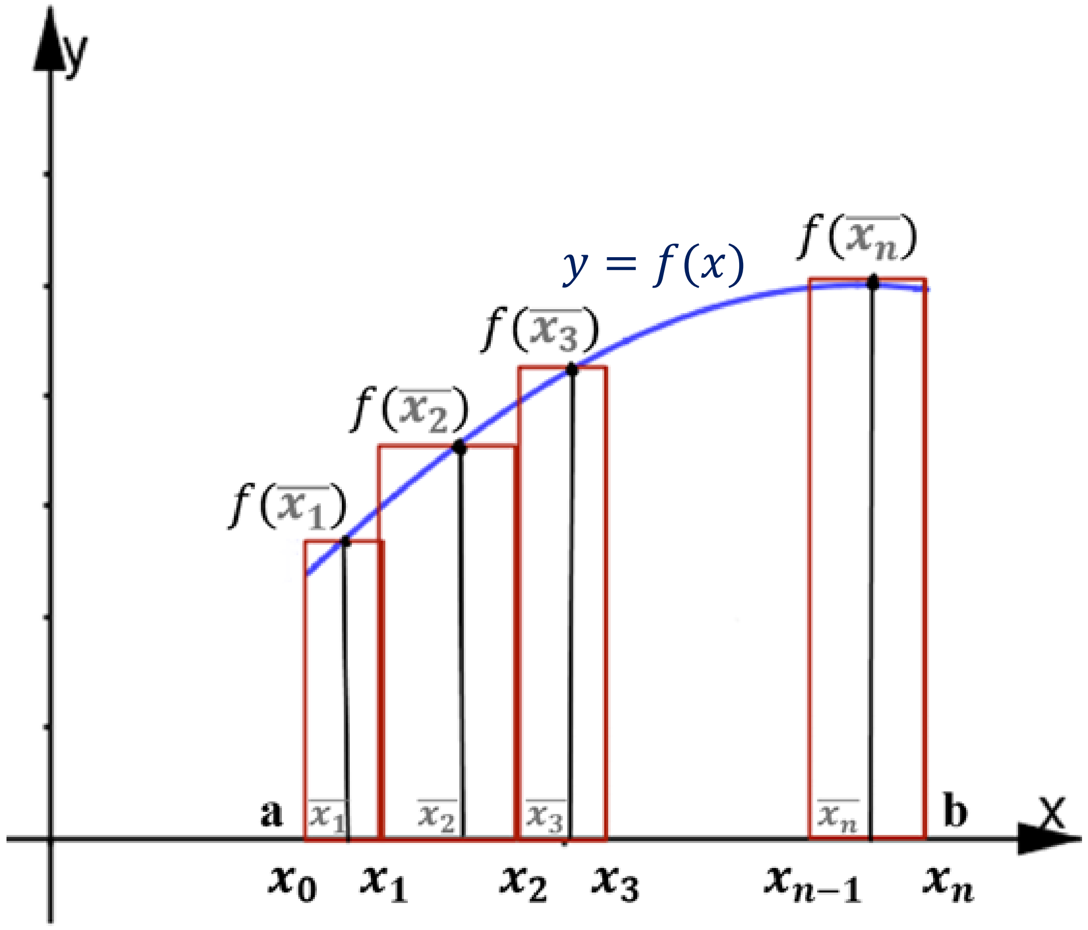
SumaTrapezoidal[sqrt(x-1),1,6,5]

Obtiene el siguiente resultado: 7.26.



SUMAS DE RIEMANN

Sea f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, si se divide la región determinada por f y el $EjeX$ en dicho intervalo con "n" rectángulos como se muestra la figura, se tiene:



$(i = 1,2,3, \dots, n)$

SUMAS DE RIEMANN

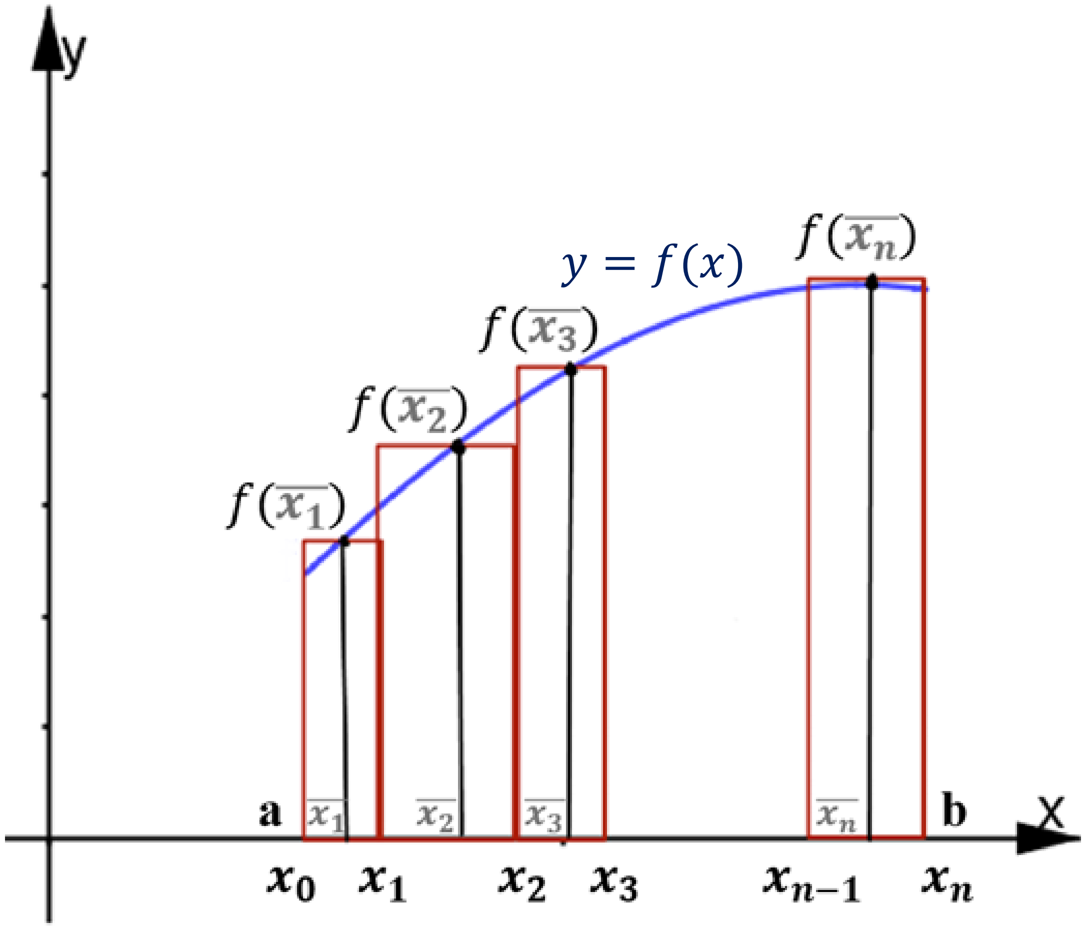
- Las bases de los rectángulos no necesariamente son iguales (Δ_{x_i}).

- Las alturas de cada rectángulo, estarían dadas por la respectiva imagen que se tiene con el punto denotado como $\bar{x}_i$ en la función, es decir: $f(\bar{x}_i)$.

- Es así como el área de cada rectángulo está dada por:

$$\boxed{A_i = f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}}$$

$(i = 1,2,3,\dots,n)$



www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

SUMAS DE RIEMANN

Luego, la suma de las áreas de los “n” rectángulos está dada por:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}$$

La suma S (que es un número real) se llama una **Suma de Riemann** de $f(x)$ en $[a, b]$.

Dado que se busca determinar el área de la región comprendida bajo la función $y = f(x)$, se considera entonces una suma infinita de áreas de rectángulos. De esta manera, el área (A) de la región buscada está dada por:

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i} \right]$$

INTEGRAL DEFINIDA

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. Al $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}\right]$ se denomina la **Integral Definida** (o Integral de Riemann) de $f(x)$ de "a" a "b" y se denota de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(Se lee: Integral de "a" a "b" de $f(x)$ de x)

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}\right] = \int_a^b f(x)dx$$

("a" y "b" son los límites inferior y superior respectivamente).

INTEGRAL DEFINIDA

Integrales definidas como especiales:

https://youtu.be/bMFtHEzBMFA

https://youtu.be/QVPOaDVWoZc

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

INTEGRAL DEFINIDA

Teorema: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$. La expresión "$f(x)$ es integrable en $[a,b]$" significa que $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}\right]$ existe, es decir es un número real.

Ejemplo: Hallar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en $[1,3]$, usando la definición de Sumas de Riemann.

Solución:

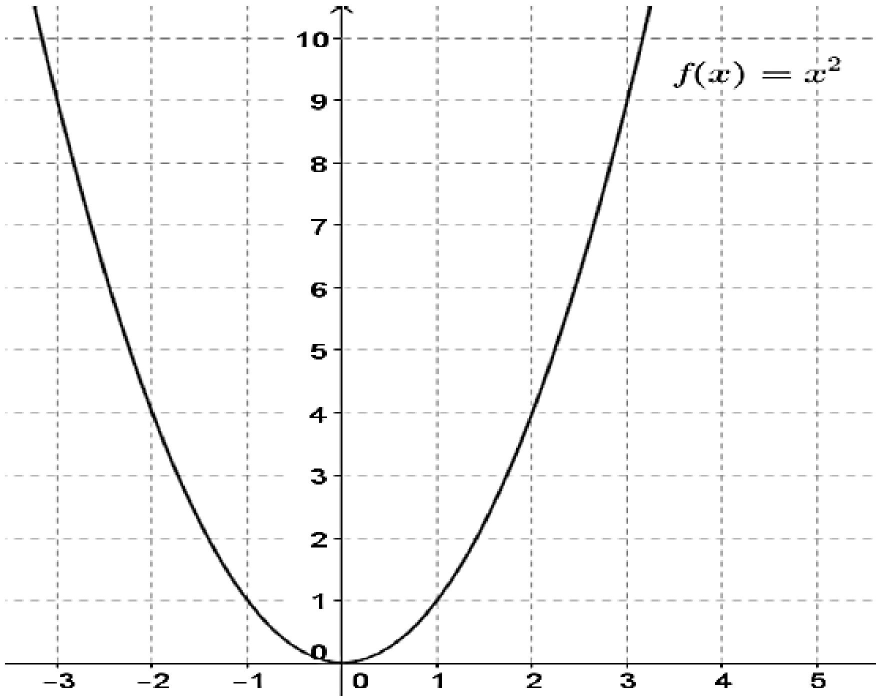
Aplicando la definición de Sumas de Riemann se tiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_{x_i}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[f(\bar{x}_1)\Delta_{x_1} + f(\bar{x}_2)\Delta_{x_2} + f(\bar{x}_3)\Delta_{x_3} + \cdots + f(\bar{x}_n)\Delta_{x_n}\right]$$

INTEGRAL DEFINIDA

PRIMER MÉTODO: Por la derecha.

Escogemos $\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2, \bar{x}_3 = x_3, \ldots, \bar{x}_i = x_i$.



- Construimos n rectángulos que abarquen el área pedida. (Por la derecha)

- Determinamos el ancho de cada rectángulo (denotado Δ_x) como:

$$\Delta_x = \frac{Límite\ superior - Límite\ inferior}{n}$$

n: número de rectángulos.

Es decir:

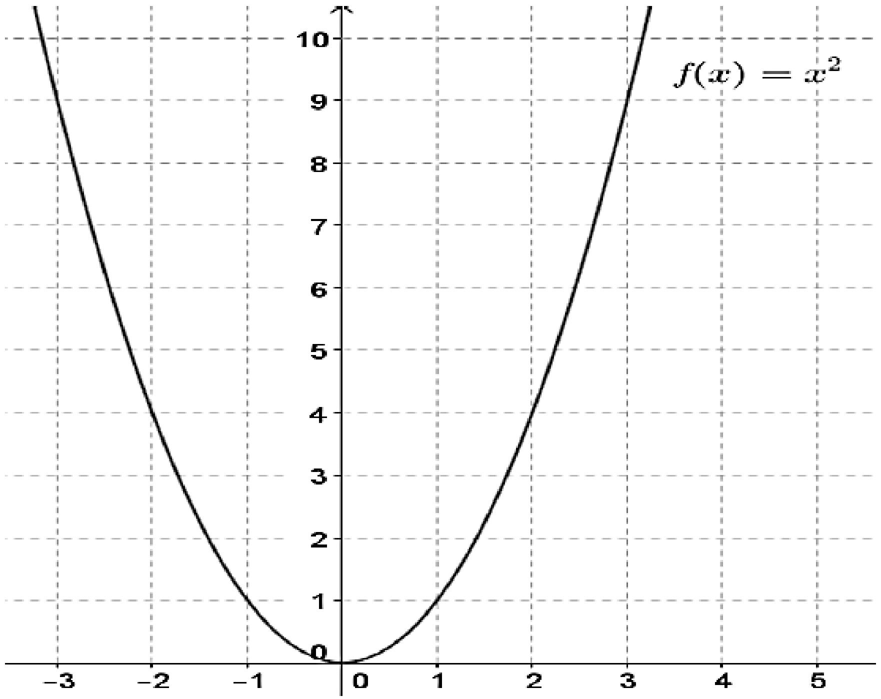
$\Delta_x = \frac{3-1}{n}$, luego: $\Delta_x = \frac{2}{n}$

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

INTEGRAL DEFINIDA

PRIMER MÉTODO: Por la derecha.

Escogemos $\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2, \bar{x}_3 = x_3, \ldots, \bar{x}_i = x_i$.



Ahora,

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 = a & = 1 & = 1 + 0(\Delta_x) & = & 1 \\
x_1 = x_0 + \Delta_x & = 1 + \Delta_x & = 1 + 1(\Delta_x) & = & 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) \\
x_2 = x_1 + \Delta_x & = (1 + \Delta_x) + \Delta_x & = 1 + 2(\Delta_x) & = & 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) \\
x_3 = x_2 + \Delta_x & = (1 + \Delta_x + \Delta_x) + \Delta_x & = 1 + 3(\Delta_x) & = & 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right) \\
\vdots & & & & \vdots \\
x_i = x_{i-1} + \Delta_x & \ldots & = 1 + i(\Delta_x) & = & 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)
\end{array}
$$

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

INTEGRAL DEFINIDA

$$\Delta_x = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
Área &= \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + \cdots + f(x_n)\Delta_x] && \text{Suma de áreas de cada rectángulo.}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_x && \text{Empleo de notación.}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\frac{2}{n} && \text{Reemplazamos } x_i \text{ y } \Delta_x.\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\frac{2}{n} && \text{Efectuamos la función.}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2\right] && \text{Sale la constante de la sumatoria y desarrollamos el binomio.}
\end{aligned}$$

INTEGRAL DEFINIDA

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn;$ $\quad c: constante.$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} i^2\right]$$

Propiedad de linealidad.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

Sale la constante de cada sumatoria.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[n + \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right]$$

Uso del teorema: fórmulas de suma.

$$= \frac{26}{3}$$

Simplificando y evaluando. (Verifique).

Por tanto, el área bajo la curva es: $\frac{26}{3} u^2$.

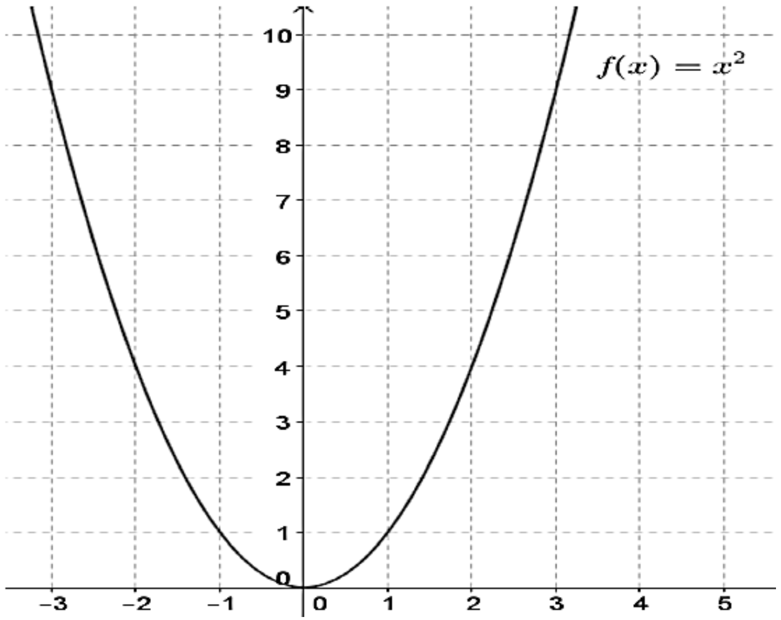
www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

INTEGRAL DEFINIDA

Ejercicio: Resolver el ejercicio anterior usando rectángulos "por la izquierda".

PRIMER MÉTODO: Por la derecha.

Escogemos $\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2, \bar{x}_3 = x_3, \ldots, \bar{x}_i = x_i$.



Al igual que el método anterior:

$$\Delta_x = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

INTEGRAL DEFINIDA

Ejercicio:

De esta manera:

$Área = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + \cdots + f(x_n)\Delta_x]$	Suma de áreas de cada rectángulo.
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta_x$	Empleo de notación.

$\vdots$

INTEGRAL DEFINIDA

Aproximación usando la regla de los trapecios

Sea *f* continua en [a,b]. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Los coeficientes de la regla de los trapecios siguen la secuencia: 1 2 2 2 … 2 2 1.

Ejercicio: Utilizar la regla de los trapecios para estimar $\int_0^\pi senx dx$.

1. Considerando $n = 4$.
2. Considerando $n = 8$.

PROPIEDADES DE LINEALIDAD

Suponga que f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$ y sea $k \epsilon \mathbb{R}$, entonces:

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b [f(x)] dx + \int_a^b [g(x)] dx$

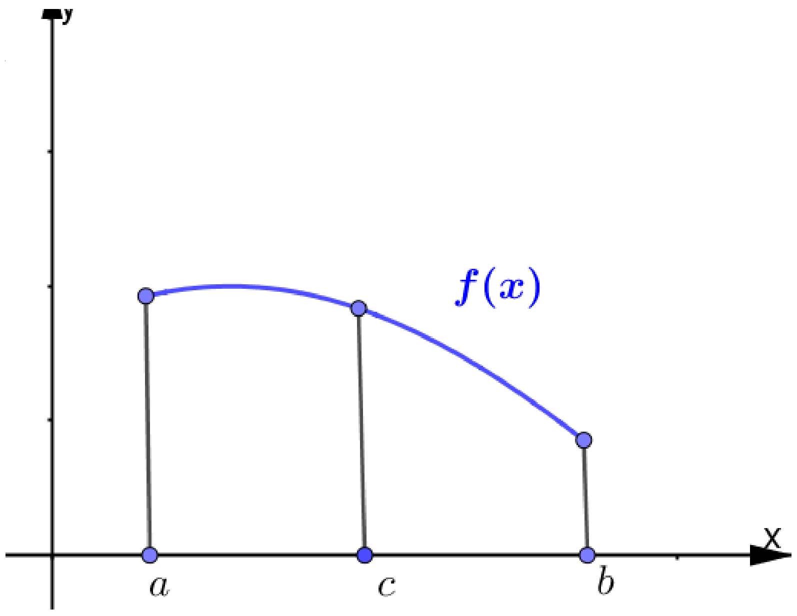
2. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

PROPIEDAD DE ADITIVIDAD

https://youtu.be/ETAOqf7KKUw

Si f es integrable en un intervalo que contiene a los puntos a, b y c (sin importar su orden), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

https://youtu.be/3lkHBV9CWzk

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea la función F definida por:

Función que depende de "x"

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt; \qquad \forall x \in [a, b]$$

Constante

Función que depende de "t"

Entonces, F es una antiderivada de f en $[a, b]$, esto es: $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Es decir:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejemplos: Determinar $\frac{d}{dx}F(x)$ para cada una de las funciones dadas:

1. $F(x) = \int_2^{x} \frac{t^{3/2}\sec(t+1)}{t-2}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_2^{x} \frac{t^{3/2}\sec(t+1)}{t-2}\,dt$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{x^{3/2}\sec(x+1)}{x-2}$$

2. $F(x) = \int_2^{x^3} \frac{t^{3/2}\sec(t+1)}{t-2}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_2^{x^3} \frac{t^{3/2}\sec(t+1)}{t-2}\,dt$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{(x^3)^{3/2}\sec((x^3)+1)}{x^3-2}\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = 3x^2\frac{(x^3)^{3/2}\sec((x^3)+1)}{x^3-2}$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{3x^6\sqrt{x}\sec((x^3)+1)}{x^3-2}$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

https://youtu.be/s2jO8fsFvRM

https://youtu.be/IssaDhlbnbA

https://youtu.be/KVpDeIOHews

El Teorema se puede generalizar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}F(\boldsymbol{u(x)}) = \frac{d}{dx}\int_{a}^{\boldsymbol{u(x)}} f(t)dt = f(\boldsymbol{u(x)})\frac{d}{dx}\boldsymbol{u(x)}$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejercicios: Determinar $\frac{d}{dx}F(x)$ para cada una de las funciones dadas:

$$1.\ F(x) = \int_9^x \frac{sen(\sqrt{t+1})}{2t+\pi}\,dt$$

$$2.\ F(x) = \int_0^x \frac{Tan^3\,(\sqrt{\cos(t)})}{\sqrt[3]{t}}\,dt$$

$$3.\ F(x) = \int_0^{x^2} \frac{Tan^3\,(\sqrt{\cos(t)})}{\sqrt[3]{t}}\,dt$$

$$4.\ F(x) = \int_e^{ln^2(x)} \frac{(m+1)(\sqrt{\mathrm{sen}(m)})}{\sqrt[3]{m+e}}\,dm$$

$$5.\ F(x) = \int_\pi^{(x+2)sen^2(x)} \frac{(\sqrt{\tan(m)}+2)(\sqrt{\cos(m+2)})}{\sqrt[3]{m+e}}\,dm$$

$$6.\ F(x) = \int_{25}^{xsenh^2(x)} \frac{(\sqrt{\cos(t+1)}+4)(\sqrt{\sec(t+e)})}{\sqrt[5]{2t}}\,dt$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejercicios: Determinar $\frac{d}{dx}F(x)$ para cada una de las funciones dadas:
De 1 a 3 considere una integral definida como especial. De 4 a 6 considere la propiedad de aditividad.

1. $F(x) = \int_{x}^{10} \frac{sen(\sqrt{t+1})}{2t+\pi}\,dt$

2. $F(x) = \int_{x}^{0} \frac{Tan^3\left(\sqrt{\cos(t)}\right)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$

3. $F(x) = \int_{x^2}^{5} \frac{Tan^3\left(\sqrt{\cos(t)}\right)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$

4. $F(x) = \int_{x}^{ln^2(x)} \frac{(m+1)\left(\sqrt{\mathrm{sen}(m)}\right)}{\sqrt[3]{m+e}}\,dm$

5. $F(x) = \int_{x+1}^{(x+2)sen^2(x)} \frac{\left(\sqrt{\tan(m)}+2\right)\left(\sqrt{\cos(m+2)}\right)}{\sqrt[3]{m+e}}\,dm$

6. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{xsenh^2(x)} \frac{\left(\sqrt{\cos(t+1)}+4\right)\left(\sqrt{\sec(t+e)}\right)}{\sqrt[5]{2t}}\,dt$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

https://youtu.be/TbXk9tW1SWo

Ejemplo. Hallar: $\int_{-5}^{2} x^3 dx$.

Solución:

$$\int_{-5}^{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-5}^{2}$$

$$\int_{-5}^{2} x^3 dx = F(2) - F(-5)$$

$$\int_{-5}^{2} x^3 dx = \left[\left(\frac{(2)^4}{4} + C\right) - \left(\frac{(-5)^4}{4} + C\right)\right]$$

$$= -152.25$$

Determinamos la antiderivada de $f, F(x)$:

$$F(x) = \int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + C$$

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejercicios: Determinar cada una de las integrales definidas.

1. $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{\pi x + e}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt{2x^2 + 1}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec(x) + \tan(x))^2\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-4}^{10} |x|\,dx$
5. $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(\frac{x}{3} + 2x\right)^4 dx$
7. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2 + 10x + 25}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{3/2} (2x + 1)^{-1/3}\,dx$
9. $\displaystyle\int_{-4}^{12} \sqrt{w + 4}\,dw$
10. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{z}{\sqrt{z^2 + 16}}\,dz$
11. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{t}{(t^2 + 1)^2}\,dt$
12. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejercicios: Determinar cada una de las integrales definidas.

13. $\int_{-3}^{1} \frac{1}{2x+e} dx$

14. $\int_{0}^{2} x\sqrt{2x^2+1} dx$

15. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec(x) + \tan(x))^2 dx$

16. $\int_{-4}^{10} |x| dx$

17. $\int_{-1}^{1} |x+2| dx$

18. $\int_{0,5}^{7} |Ln(x)| dx$

19. $\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

20. $\int_{2}^{3} \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

21. $\int_1^4 f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 3x-3; & x < 2.3 \\ -(x-2)^2+4; & x \geq 2.3 \end{cases}$

21. $\int_{-2}^7 g(x)dx$ donde $g(x) = \begin{cases} 2x-2; & x \geq 5 \\ x^2-3x-1; & x < 5 \end{cases}$

21. $\int_0^5 h(x)dx$ donde $h(x) = \begin{cases} -x+2; & x < 1 \\ \ln(x)+1; & x \geq 1 \end{cases}$

22. $\int_0^5 h(x)dx$ donde $h(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ e^x-1; & x \geq 0 \end{cases}$

PRIMER Y SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

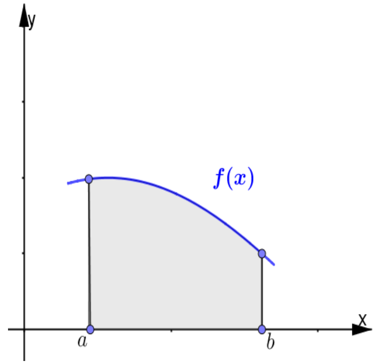
Ejercicio. Determinar:

$$\frac{d}{dx}\int_{5}^{\sqrt{sen(x)}} x^2 t dt$$

TEOREMA. LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

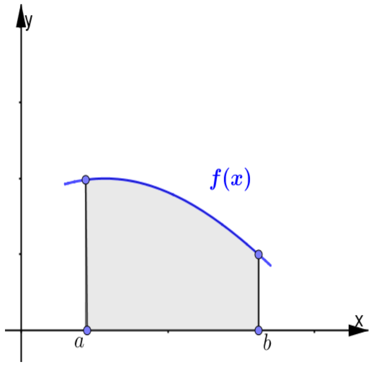
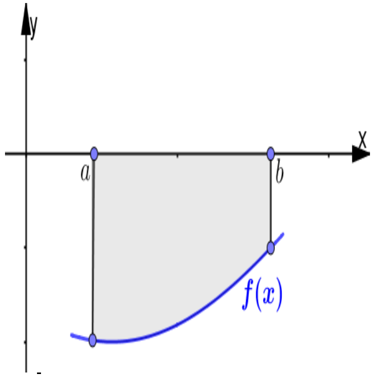
Si f es continua y *no negativa* en el intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje "x" y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, viene dada por:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



Observe a continuación la representación gráfica del área cuando f es ***no negativa*** o ***negativa.***

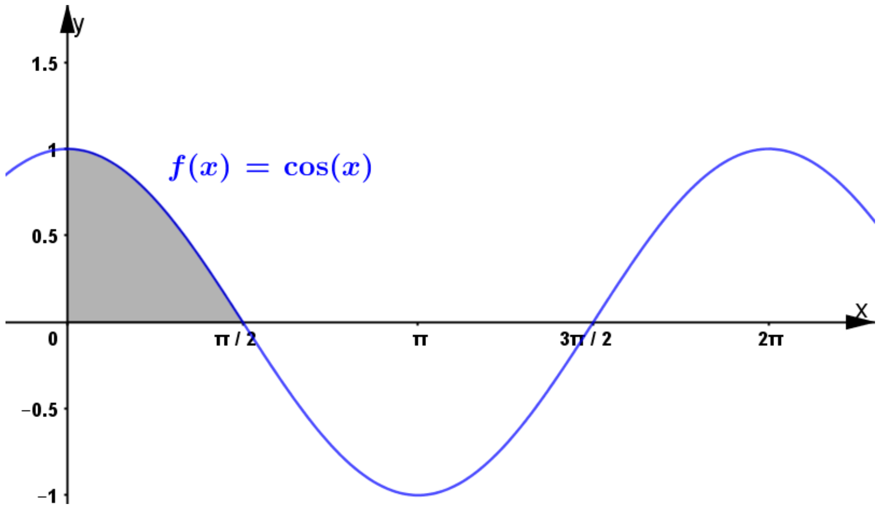
TEOREMA. LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Condición	Valor del área bajo la curva	Gráfica
$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$	$A = \int_a^b f(x)dx$	
$f(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$	$A = -\int_a^b f(x)dx$	

INTEGRALES DEFINIDAS Y “ÁREA NEGATIVA”

https://youtu.be/rXXh5cNX2mg

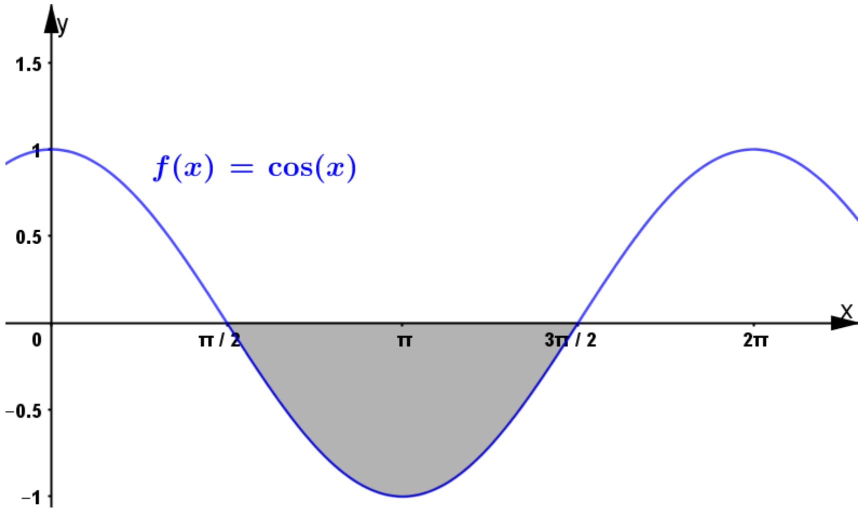
Ejercicio: Dada la función $f(x) = cos x$. Completar la tabla siguiente:

INTERVALO	VALOR DE LA INTEGRAL	VALOR DEL ÁREA	GRÁFICA
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$			

www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

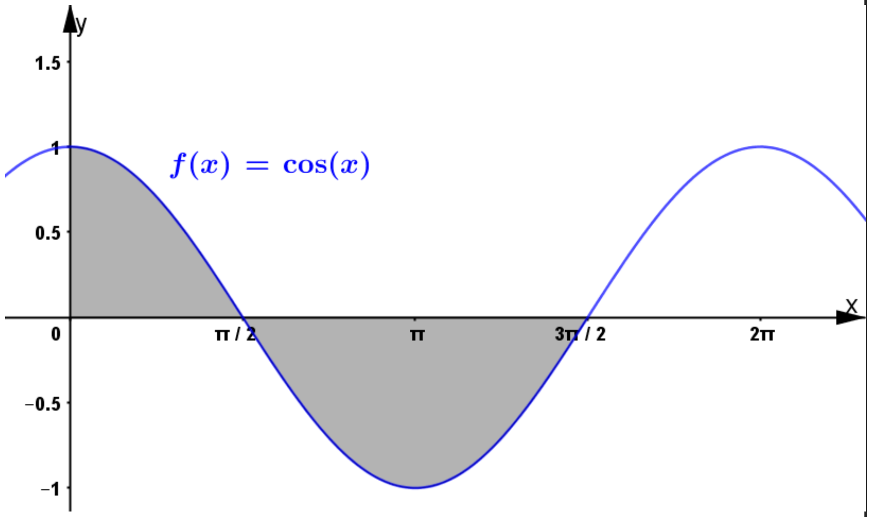
INTEGRALES DEFINIDAS Y "ÁREA NEGATIVA"

Ejercicio: Dada la función $f(x) = cosx$. Completar la tabla siguiente:

INTERVALO	VALOR DE LA INTEGRAL	VALOR DEL ÁREA	GRÁFICA
$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$			

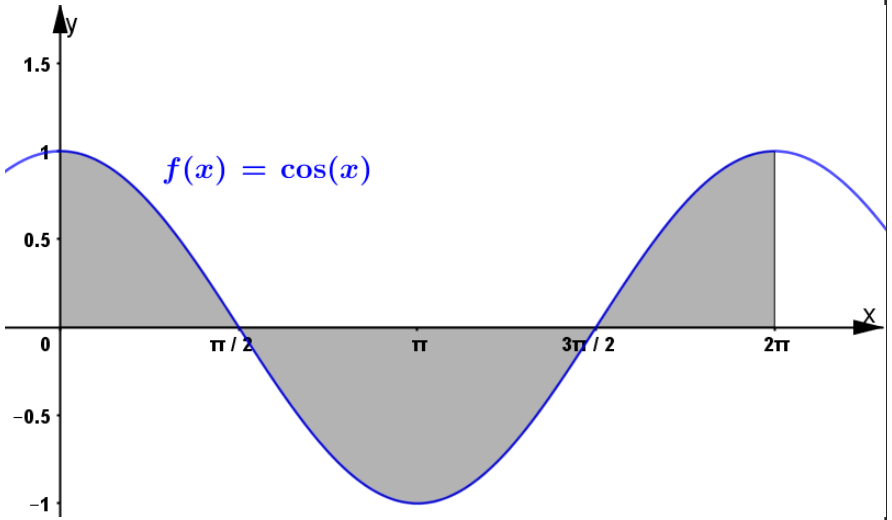
INTEGRALES DEFINIDAS Y “ÁREA NEGATIVA”

Ejercicio: Dada la función $f(x) = cosx$. Completar la tabla siguiente:

INTERVALO	VALOR DE LA INTEGRAL	VALOR DEL ÁREA	GRÁFICA
$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$			

INTEGRALES DEFINIDAS Y “ÁREA NEGATIVA”

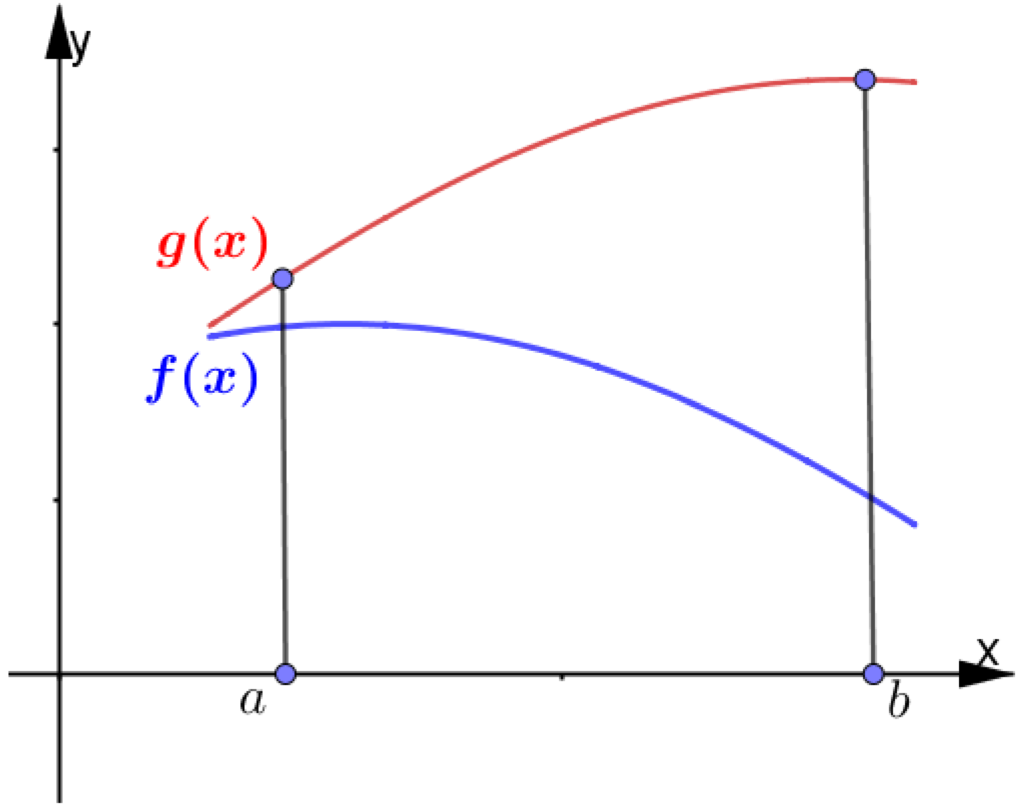
Ejercicio: Dada la función $f(x) = cosx$. Completar la tabla siguiente:

INTERVALO	VALOR DE LA INTEGRAL	VALOR DEL ÁREA	GRÁFICA
$[0,2\pi]$			

PROPIEDAD DE COMPARACIÓN

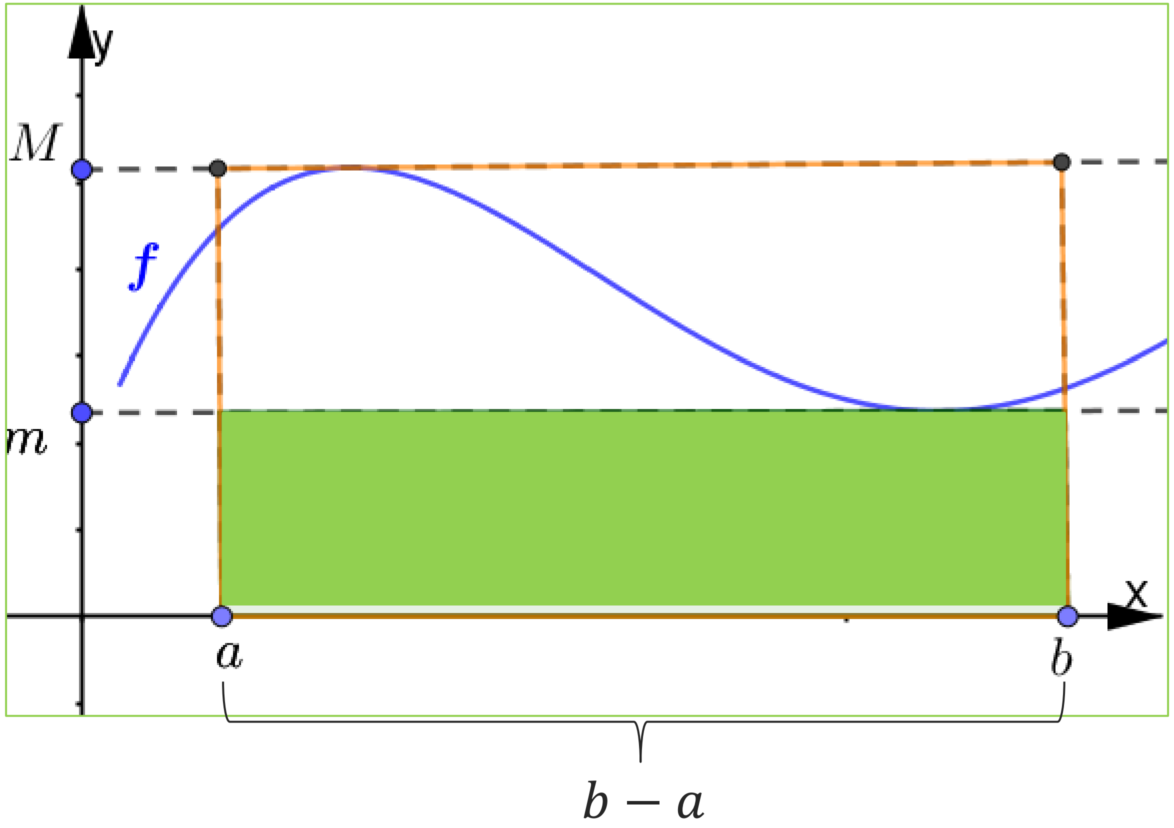
Si f y g son integrables en $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$



PROPIEDAD DE ACOTAMIENTO

Si f es integrable en $[a,b]$ y si $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$; entonces:



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

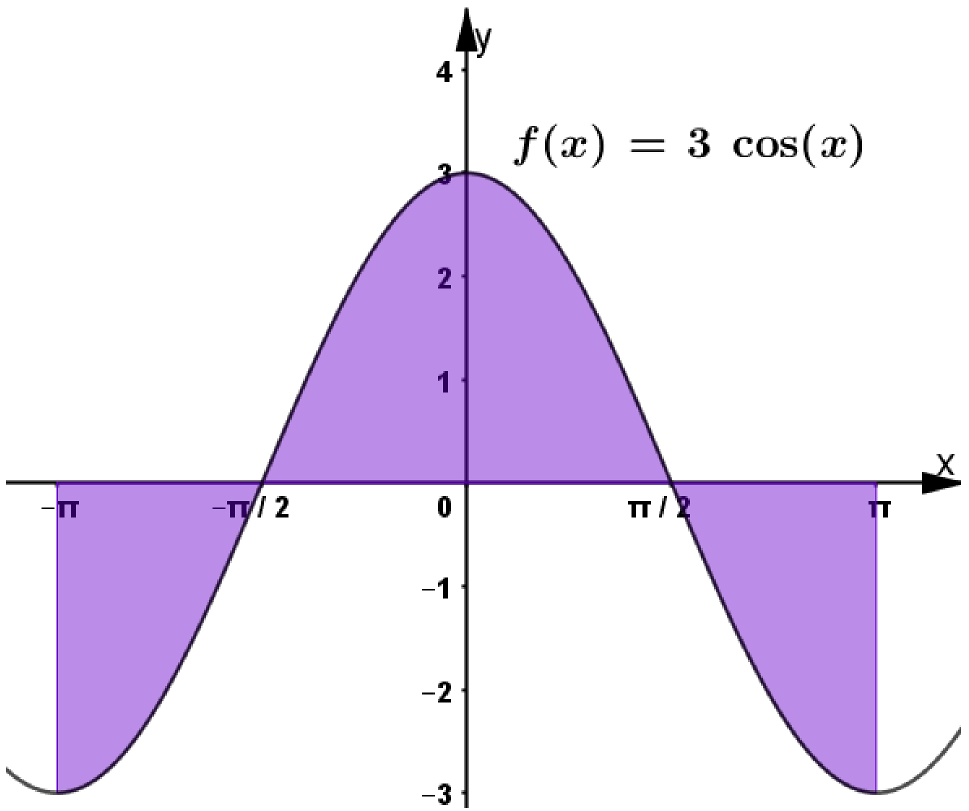
$$\boxed{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \boxed{M(b-a)}$$

PROPIEDAD DE SIMETRÍA

¿Qué es una función PAR?

1. Si f es una función PAR entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



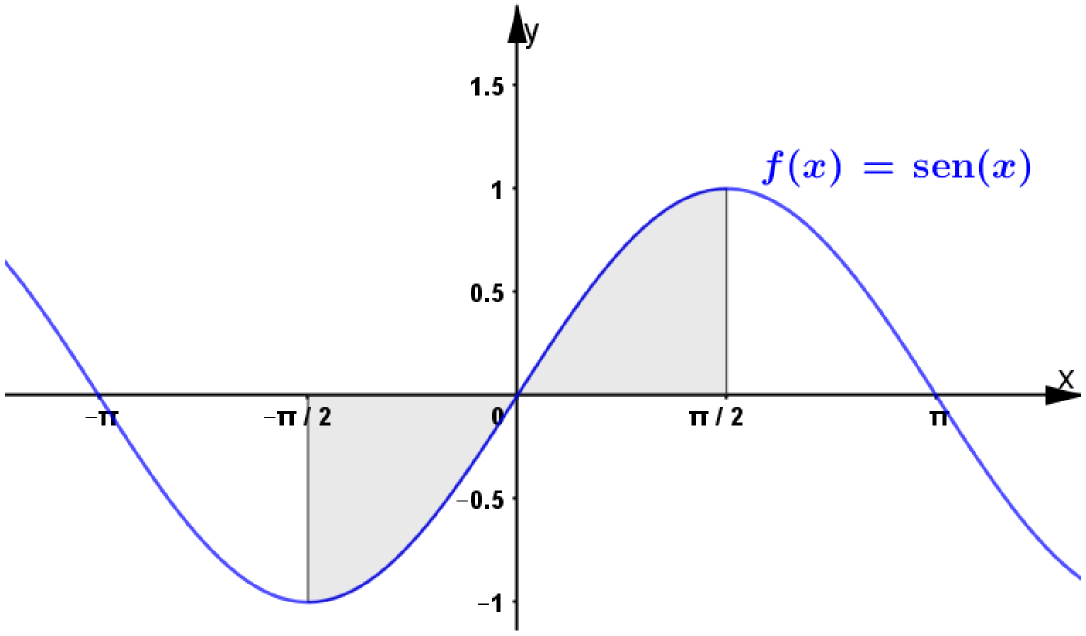
www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

PROPIEDAD DE SIMETRÍA

¿Qué es una función IMPAR?

2. Si f es una función IMPAR entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



PROPIEDAD DE SIMETRÍA

Ejercicio: Si $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = 1.$ Determine las siguientes integrales.

1. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos(x)\, dx$

2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, dx$

Ejercicio: Determine las siguientes integrales:

1. $\int_{-1}^{1} \frac{x^7}{x^2+2}\, dx$

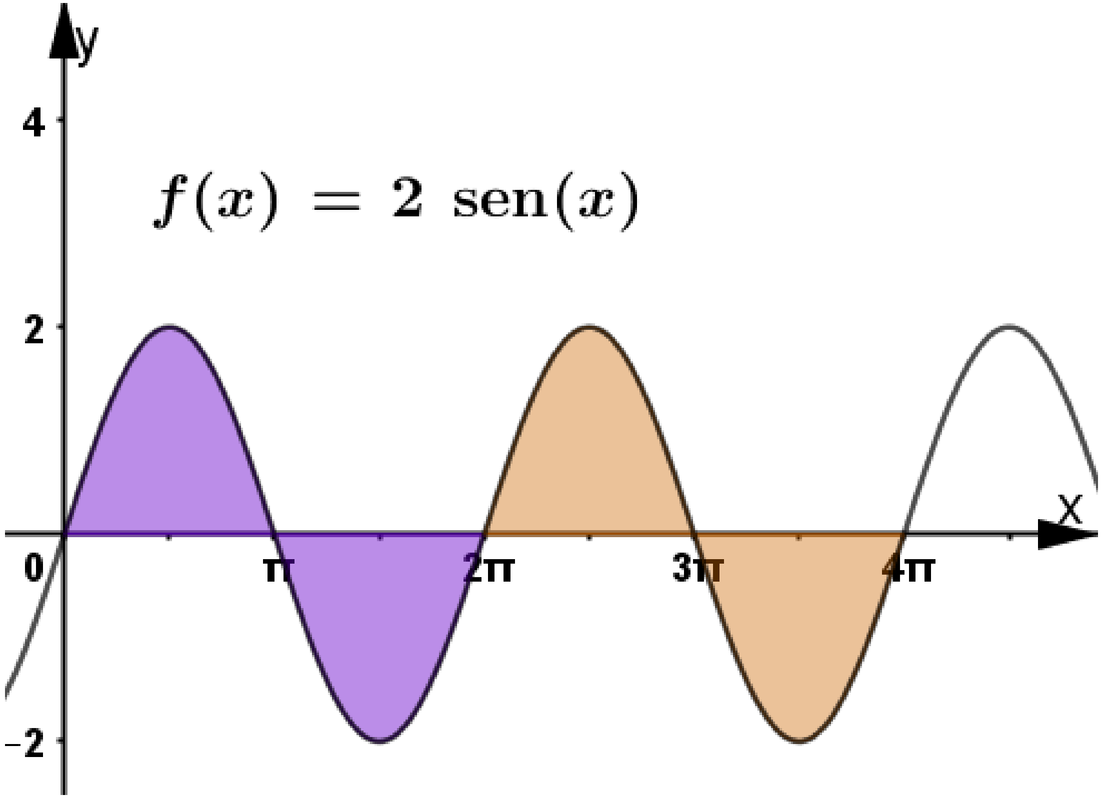
2. $\int_{-3}^{3} \frac{x^5}{x^2+2}\, dx$

PROPIEDAD DE PERIODICIDAD

¿Qué es una función PERIÓDICA?

Si f es periódica con período T, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$



INTEGRALES IMPROPIAS

En integración se pide que la función sea continua en el intervalo considerado y que además éste sea finito. En este tema se pretende estudiar un cierto tipo de integrales en las cuales uno o los dos límites de integración son el infinito o bien, cuando el integrando considera una función con un número finito de discontinuidades en el intervalo de integración en estudio. A estas integrales se les llamará ***integrales impropias*.**

INTEGRALES IMPROPIAS

https://youtu.be/WugBA9nH1oA
https://youtu.be/YptEbm3H4H8

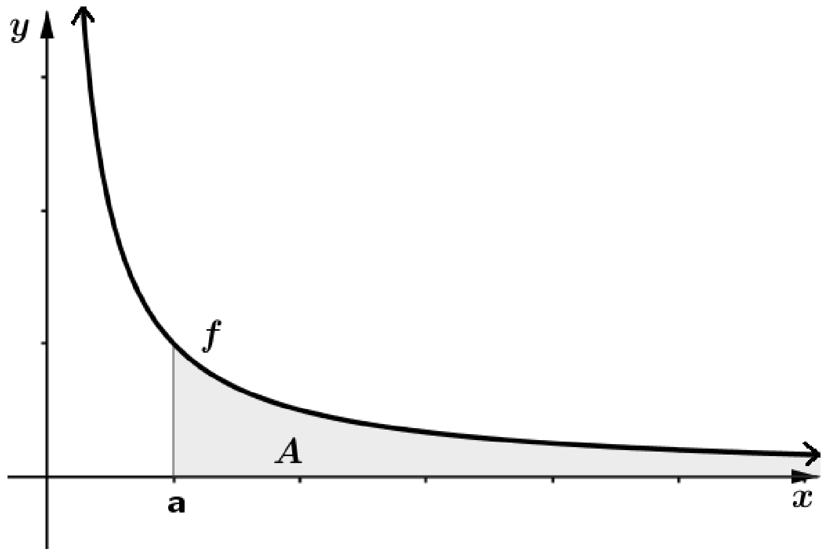
En cada caso, si el límite es finito, se dice que la integral impropia es **convergente** y que el valor del límite es el valor de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia es **divergente.** Cuando la integral original se divide en dos integrales, ambas deben ser convergentes para que la integral original sea convergente. Si una es divergente o las dos lo son, la integral original es divergente.

INTEGRALES IMPROPIAS

Caso 1. Sea la función f continua en el intervalo $[a, \infty)$. Entonces el área bajo la curva, limitada arriba por la gráfica de la curva y hacia la derecha de $x = a$ de manera indefinida, se obtiene a partir de la siguiente integral:

$$A = \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

Si el límite existe.

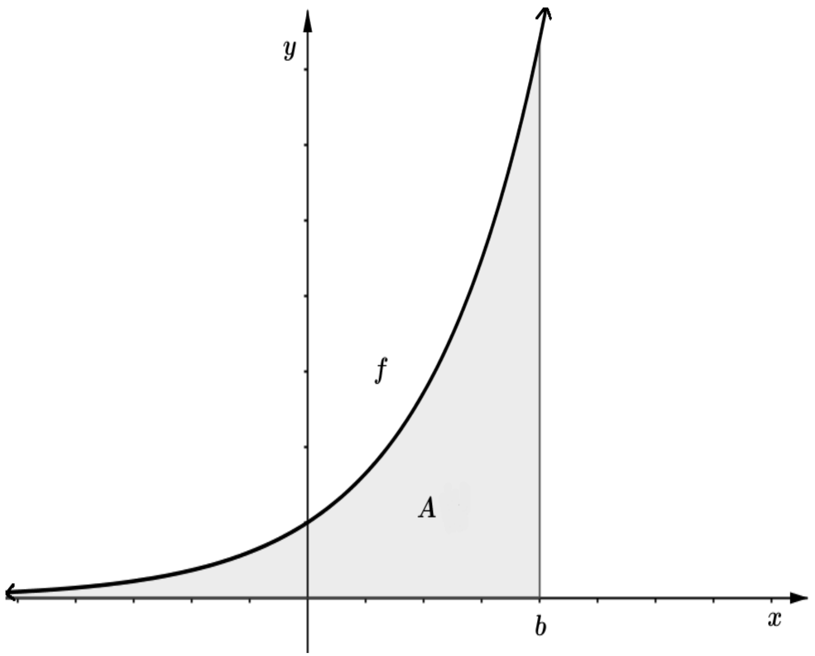


INTEGRALES IMPROPIAS

Caso 2. Sea la función f continua en el intervalo $(-\infty, b]$. Entonces, el área bajo la curva, limitada arriba por la gráfica de la curva y hacia la izquierda de $x = b$ de manera indefinida, se obtiene a partir de la siguiente integral:

$$A = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

Si el límite existe.



INTEGRALES IMPROPIAS

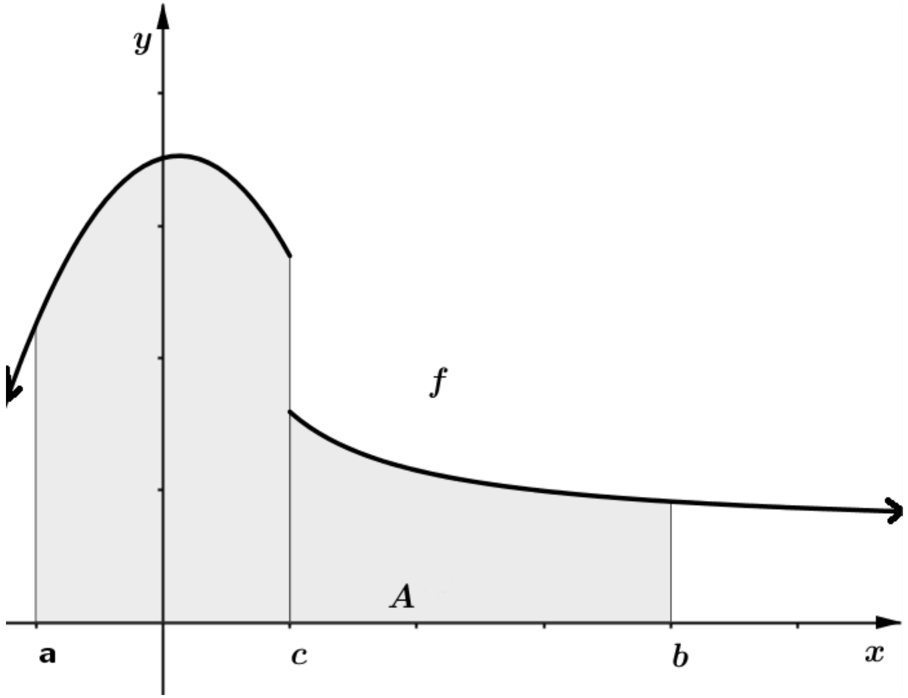
Caso 3. Sea la función f continua en el intervalo [a, c) ∪ (c, b] . Entonces, el área bajo la curva, limitada por los valores extremos del intervalo y considerando el punto de discontinuidad en $x = c$ se obtiene a partir de las siguientes integrales:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Es decir:

$$A = \lim_{p \to c} \int_a^p f(x)dx + \lim_{q \to c} \int_q^b f(x)dx$$

Si los límites existen.



INTEGRALES IMPROPIAS

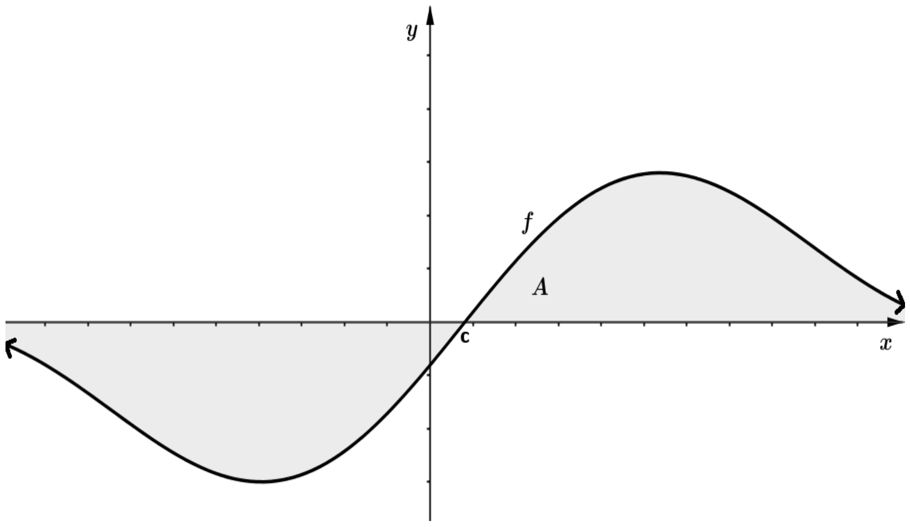
Caso 4. Sea la función f continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Entonces, el área bajo la curva, limitada por la gráfica de la curva y que se abre indefinidamente hacia la izquierda y derecha en el eje de las abscisas, se obtiene a partir de las siguientes integrales:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Es decir:

$$A = \lim_{p \to -\infty} \int_{p}^{c} f(x)dx + \lim_{q \to \infty} \int_{c}^{q} f(x)dx$$

Si los límites existen.



INTEGRALES IMPROPIAS

Ejercicios: En todos los casos, graficar cada una de las funciones.

1. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

a. $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$ b. $\int_3^{\infty} \frac{1}{x-2} dx$

2. Asignar un área a la región que queda comprendida bajo la curva $y = \frac{e^x}{4}$, sobre el eje "x" y a la izquierda de $x = 4$.

3. Calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^2+2} dx$.

INTEGRALES IMPROPIAS

4. Analizar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

5. Investigar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_{0}^{8} \frac{dx}{(5-x)^{2/3}}$$

INTEGRALES IMPROPIAS

6. Evaluar la integral impropia siguiente y asignar si es posible un valor al área que la integral considera:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

7. Evaluar la siguiente integral definida, trazar el área que considera y resolverla:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

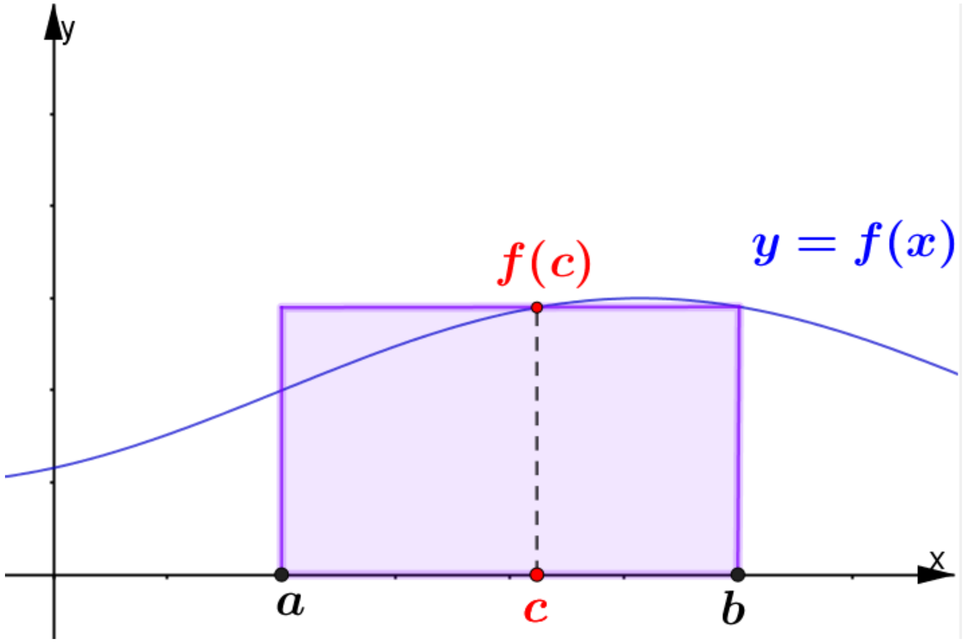
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f continua en $[a, b]$. El valor medio de f en el intervalo dado está dado por:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

El teorema asegura que existe un valor c en el intervalo (a, b) cuya imagen corresponde a la altura del rectángulo de base (b - a) y su área coincide con la de la región definida por la función f en dicho intervalo. Esto es:

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$$



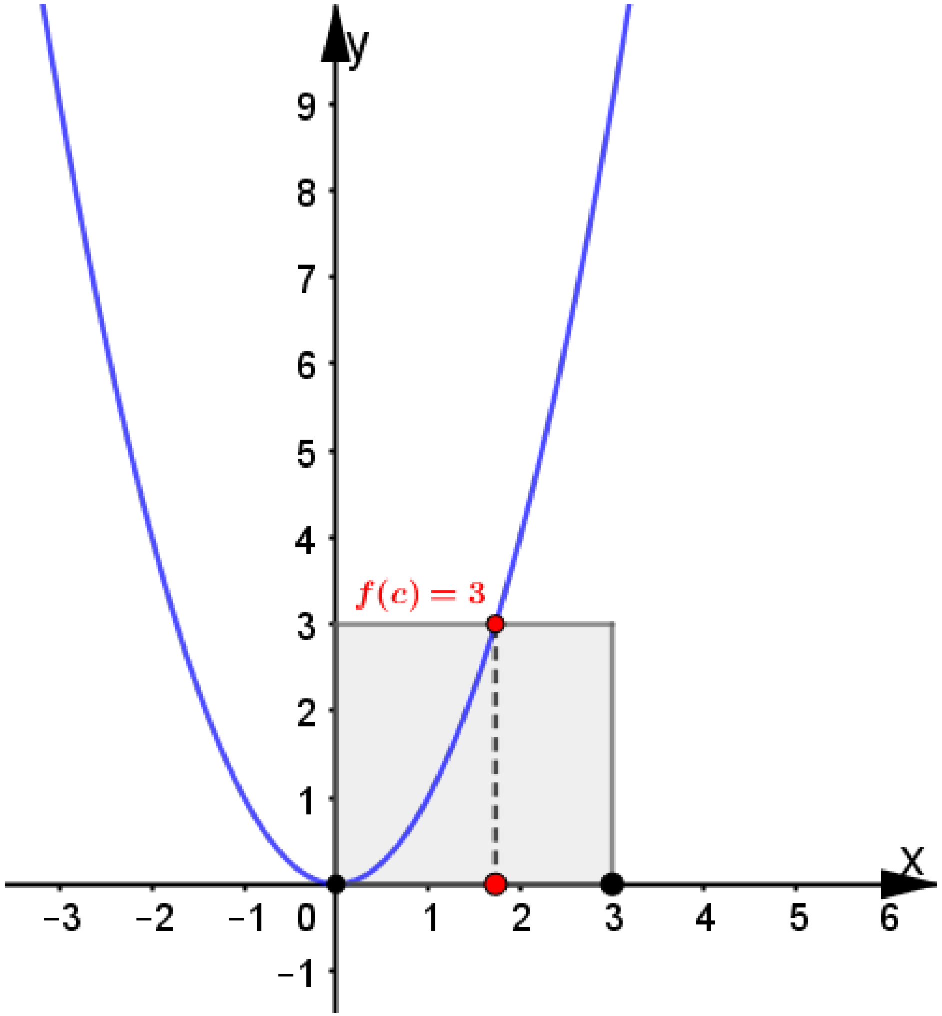
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Ejemplo: Encontrar el valor medio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,3].

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2 dx$$

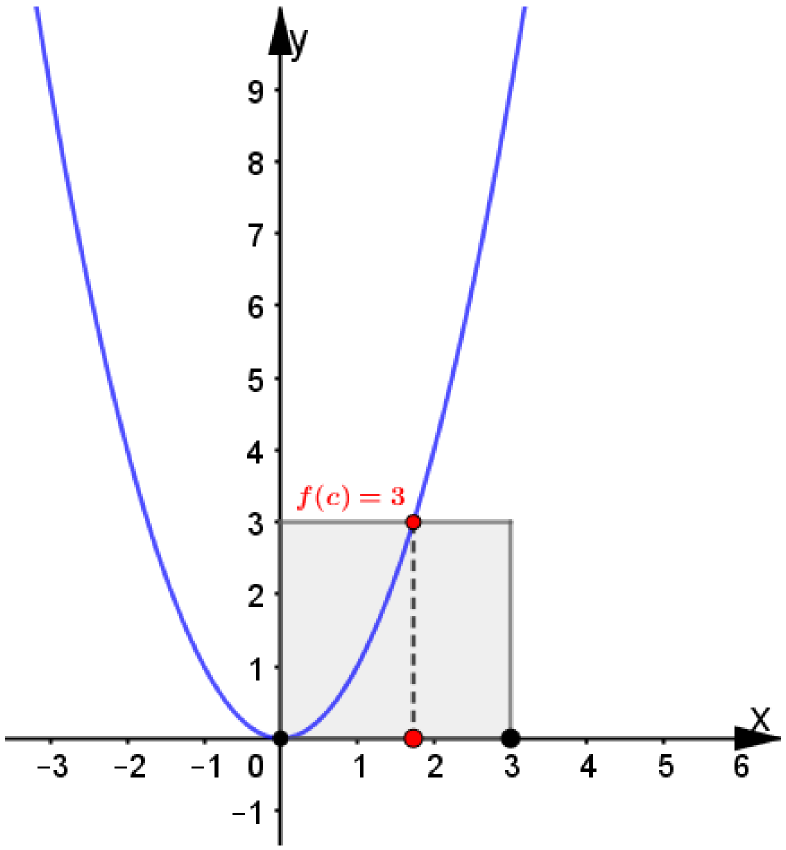
$$f(c) = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$f(c) = 3$



TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Ejercicio: Encontrar el valor o valores de “*c*” que satisfacen el Teorema del Valor Medio para el ejemplo anterior.



www.mathspace.jimdo.com-Astrid Álvarez Castro.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Ejercicio: Encontrar el valor o valores de "c" que satisfacen el Teorema del Valor Medio para las siguientes funciones en el intervalo dado.

Grafique cada función y el rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$.

1. $y = x^3$ en $[0,3]$.

2. $y = x - \sqrt{x}$ en $[1,4]$.

3. $y = x + \cos(x)$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.