Capítulo 1
Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Versión Beta 1.0

www.mathspace.jimdo.com

1.1. Preliminares: Definiciones y Terminología

Derivadas parciales:

Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función de varias variables respecto a una de sus variables independientes, se utiliza el proceso de ***Derivación Parcial***.

Definición: Supóngase que $z = f(x, y)$.

La *derivada parcial* de f respecto de "x" se denota mediante: $\frac{\partial z}{\partial x}$ ó $f_x(x, y)$. Y es la función obtenida mediante la derivación de f respecto de "x", si "y" permanece constante.

La *derivada parcial* de f respecto de "y" se denota mediante: $\frac{\partial z}{\partial y}$ ó $f_y(x, y)$. Y es la función obtenida mediante derivación de f respecto de "y", si "x" se mantiene constante.

Ejemplo 1: Halle las derivadas parciales de f, si $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

Solución:

- $f_x(x, y) = 2x + 2y^2(1) + \frac{2y}{3}(-x^{-2})$

  $$f_x(x, y) = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2}$$

- $f_y(x, y) = (0) + 2x(2y) + \frac{2}{3x}(1)$
- $f_y(x, y) = 4xy + \frac{2}{3x}$

Ejercicio 1: Halle las derivadas parciales de cada una de las funciones dadas:

1. $f(x, y) = yx^2 + 4x^3y^4$
2. $z = (x^2 + xy^3 - 2y)^2$
3. $f(x, y) = xe^{-2xy}$
4. $z = xe^{-x^2y}$ Evaluar en $(1, Ln(2))$

Análisis marginal: En economía, el término *Análisis Marginal* se refiere a la práctica de utilizar una derivada para estimar el cambio en el valor de una función que resulta de un incremento de una unidad en una de sus variables.

Ejemplo 2: Se estima que la producción semanal de cierta fábrica está dada por la función:

$Q(x, y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, donde:

"x" es el número de trabajadores calificados e "y" es el número de trabajadores no calificados empleados en la planta.

En la actualidad la fuerza laboral consta de 30 trabajadores calificados y 60 trabajadores no calificados.

Utilice el análisis marginal para estimar el *cambio en la producción* semanal que resultará de la adición de un trabajador calificado, si el número de trabajadores no calificados permanece invariante.

Solución: La *razón de cambio* de la producción respecto al número de trabajadores calificados "x" es:

$$Q_x(x, y) = 1200 + 2xy - 3x^2$$

Para cualquier valor de "x" e "y" esta es la aproximación del número de unidades adicionales que se producirán cada semana si el número de trabajadores calificados aumenta de "x" a "$x + 1$" mientras que el número de no calificados sigue fijo en "y".

En especial, si la fuerza laboral aumenta de 30 trabajadores calificados y 60 no calificados a 31 trabajadores calificados y 60 no calificados, se tiene:

$$Q_x(30{,}60) = 1200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2100$$

Por tanto, el cambio resultante en la producción es aproximadamente 2100 unidades.

Ejercicio 2: El costo (en dólares) de fabricar un artículo está dado por: $C(x, y) = 30 + 3x + 5y$. Donde "x" es el costo de una hora de mano de obra e "y" es el costo de una libra de material. Si el costo de la mano de obra es de US$4 por hora y el de material US$3 por libra.

Calcule el costo marginal respecto a la mano de obra y el costo marginal respecto de material e interprete los resultados.

1.2. Introducción

Definición 1.2.1. Ecuación Diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **Ecuación Diferencial (ED)**.

Ejemplo 3: La expresión:

$$y'' + 2y' = 3y$$

Es una ***Ecuación Diferencial*** y además puede escribirse como:

$$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$$

O también:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 3y$$

Variable dependiente: ______. Variable independiente: ______.

Lo que se busca, es encontrar la función (funciones) que den solución a la ecuación diferencial.

En este caso, las funciones $y_1(x) = e^{-3x}$ y $y_2(x) = e^{x}$ son solución de la E.D:

$$y'' + 2y' = 3y$$

Verificación:

$y_1(x) = e^{-3x}$	$y_2(x) = e^{x}$
$\begin{aligned} {y_1}'(x) &= -3e^{-3x} \\ {y_1}''(x) &= 9e^{-3x} \end{aligned}$ Luego, reemplazando en la E.D: $y'' + 2y' = 3y$ Se tiene: $\begin{aligned} 9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) &= 3(e^{-3x}) \\ 3(e^{-3x}) &= 3(e^{-3x}) \end{aligned}$ Por tanto, se verifica la E.D dada con la función $y_1(x) = e^{-3x}$	

1.2.2. Clasificación

Las ecuaciones diferenciales se clasifican por *tipo*, *orden* y *linealidad.*

- ***Clasificación por tipo***

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). Es una ecuación que contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

Ejemplo 4:

$\frac{dy}{dx} + 10y = sen(x),$ Var. dependiente: _______. Var. independiente:_____.	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ Var. dependiente: ______. Var. independiente:______.	$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 9x + 4y$ Var. dependiente: ______. Var. independiente:_____.

Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Es una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.

Ejemplo 5:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10 = 0,$ Var. dependiente: _______. Var. independiente:______.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ Var. dependiente: ______. Var. independiente:______.	$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ Var. dependiente: _____. Var. independiente:_____.

- ***Clasificación por orden***

El orden de una ecuación diferencial ya sea EDO o EDP es el orden de la mayor derivada de la ecuación.

Ejemplo 6:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10 = 0$ Es una EDP de segundo orden.	$\frac{dy}{dx} + 10y = sen(x)$ Es una EDO de primer orden.	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 - \frac{\partial u}{\partial y} = e^x$ Es una EDP de tercer orden.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Ejemplo 7:

Dada la ecuación diferencial $(y-x)dx + 4xdy = 0$, si se supone que "y" denota la variable dependiente, entonces $y' = \frac{dy}{dx}$. Por lo que al dividir entre la diferencial dx se obtiene la forma alternativa $4xy' + y = x$.

Se puede expresar una EDO de *n-ésimo* orden con una variable dependiente por la forma general:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Donde F es una función con valores reales de *n+2* variables: $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$.

La ecuación diferencial $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$, donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la *forma normal* de la ecuación (1).

Ejemplo 8:

Forma general	**Forma normal**
$4xy' + y - x = 0$	$y' = \dfrac{x-y}{4x}$
$y'' - y' + 6y = 0$	$y'' = y' - 6y$

- ***Clasificación por linealidad***

Una ecuación diferencial de *n-ésimo* orden se dice que es lineal si F es lineal en $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de *n-ésimo* orden es lineal cuando la ecuación **(1)** es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Las dos propiedades características de una EDO lineal son las siguientes:

- La variable dependiente "y" y todas sus derivadas $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ son de **primer grado**, es decir la potencia de cada término que contiene "y" es igual a 1.

- Los coeficientes de $a_0, a_1, \dots, a_n$ de $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ dependen a lo más de la variable independiente "x".

Ejemplo 9:

$senx\frac{d^2y}{dx^2}+10x\frac{dy}{dx}=x^2,$	Es una EDO lineal de orden 2.
$\frac{d^3y}{dx^3}-(x-1)\ \frac{dy}{dx}-6y=e^x$	Es una EDO lineal de orden 3.

Una Ecuación Diferencial Ordinaria **no lineal** es simplemente no lineal. Funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como $seny$ o e^y, no se pueden representar en una ecuación lineal.

Ejemplo 10:

$(1-y)\frac{dy}{dx}+4y=e^x,$	Es una EDO no lineal de orden 1.
$\frac{d^2y}{dx^2}-seny=0$	Es una EDO no lineal de orden 2.
$\frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$	Es una EDO no lineal de orden 4.

1.2.3. Solución de una EDO

Una función ϕ definida en un intervalo *I*, que posee al menos *n* derivadas continuas en *I*, las cuales al sustituirse en una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* reduce la ecuación a una identidad, es una ***solución de la ecuación diferencial*** en el intervalo dado.

INTERVALO DE DEFINICIÓN: El intervalo *I* de la definición anterior también se conoce como intervalo de existencia, intervalo de validez, o dominio de la solución.

Ejercicio 3: Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial correspondiente en el intervalo $(-\infty,\infty)$.

1. $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2};\quad y=\frac{x^4}{16}$
2. $y''-2y'+y=0;\quad y=xe^x$

Observación: Cada ecuación diferencial del ejercicio 3 tiene la solución constante $y=0$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$.

Una solución de una ED que es igual a cero en el intervalo I se dice que es una ***solución trivial***.

CURVA SOLUCIÓN: La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución.** Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en un intervalo de definición I. Tenga en cuenta que puede haber diferencia entre la gráfica de la función ϕ y la gráfica de la solución ϕ.

Ejemplo 11:

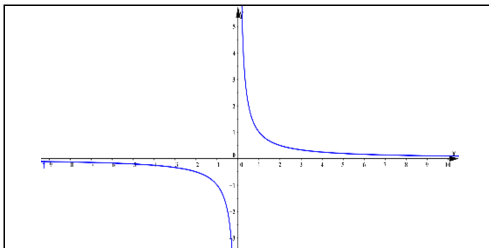
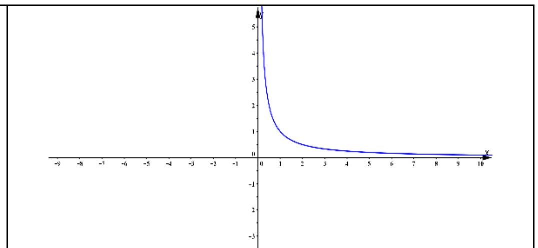
Sea la función $y = \frac{1}{x}$

- El dominio de $y = \frac{1}{x}$ considerado como una **función**, es el conjunto de los números reales excepto el 0.
- El dominio de $y = \frac{1}{x}$ considerado como una **solución** de la EDO de primer orden $xy' + y = 0$, se considera que esta solución esté definida en un intervalo en el que la función es derivable y además satisface la EDO.

  Es decir, $y = \frac{1}{x}$ es una solución de la EDO en cualquier intervalo que no contenga al 0, tal como $(-10, -1), (2{,}100), (-\infty, -100), (1, \infty)$.

  Para estos casos se toma el intervalo I, tan grande como sea posible, para este caso el intervalo de definición podría ser $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$.

  Las representaciones gráficas para los dos casos serían entonces:

	
Función $y = \frac{1}{x}$; Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$	Solución $y = \frac{1}{x}$ de $xy' + y = 0$ Intervalo de definición: $(0, \infty)$

SOLUCIÓN EXPLÍCITA DE UNA EDO: Es una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes.

Ejemplo 12:

La función $y = xe^x$ es una solución **explícita** de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$. En el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN IMPLÍCITA DE UNA EDO: Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una EDO en el intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación, así como la ED en I.

En algunos casos es posible despejar a "y" en términos de "x" de la solución implícita $G(x, y) = 0$ y obtener una o más soluciones explícitas.

Ejemplo 13:

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución **implícita** de la EDO $y' = -\frac{x}{y}$ en el intervalo $(-5,5)$. (Verifíquelo).

1.2.4. Familias de soluciones

Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado ***familia de soluciones uniparamétrica***. Cuando se resuelve una ecuación diferencial de orden n, $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, lo que se busca es entonces determinar una **familia de soluciones *n-paramétrica*** $G(x, y, c_1, c_2, , \dots, c_n) = 0$. Esto significa que una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se denomina ***solución particular***.

Ejemplo 14:

La familia uniparamétrica: $y = cx - xcosx$ es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden: $xy' - y = x^2 senx$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (Verifíquelo).

Ejemplo 15:

La familia de soluciones de dos parámetros $y = c_1e^x - c_2xe^x$ es una solución explícita de la EDO lineal de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (Verifíquelo).

Algunas veces, una ED tiene una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, esto es, una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la familia de soluciones. Esa solución extra se llama ***solución singular***.

Ejemplo 16:

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ tiene una familia de soluciones uniparamétrica $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ (Verifíquelo). Se observa que cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Pero la solución trivial $y = 0$ es una *solución singular*, ya que no forma parte de la familia de soluciones de la ED, ya que no puede obtenerse para ninguna elección del parámetro c.

Ejercicio 4: Solución como una combinación lineal de soluciones

Dada la Ecuación Diferencial $x'' + 16x = 0$, verificar que son soluciones:

1. $x_1 = c_1 cos4t$
2. $x_2 = c_2 sen4t$
3. $x \ = x_1 + x_2$

Ejemplo 17: Una solución definida por tramos

1. $y = cx^4$ es una familia de soluciones uniparamétrica de la ED $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

2. La función definida por tramos $y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$ es una solución particular de la ED $xy' - 4y = 0$, pero no se puede obtener de la familia $y = cx^4$ por una sola elección de c; la solución se construye a partir de la familia eligiendo $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \geq 0$.

1.2.5. Problemas con valores iniciales

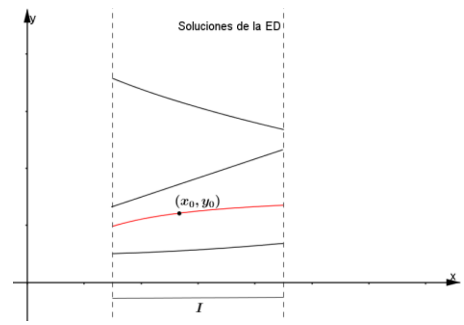
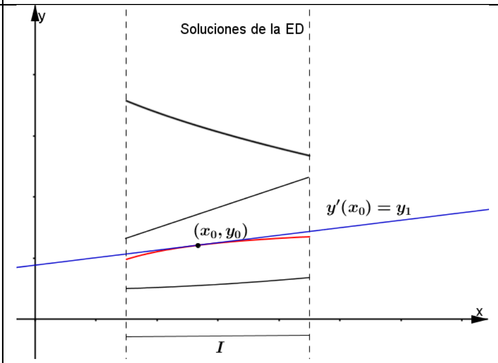
Sea un intervalo I que contiene a x_0, el problema:

Resolver: $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Sujeto a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$,

donde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias se llama **problema con valores iniciales (PVI).**

Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman **condiciones iniciales.**

PVI de primer orden **Resolver:** $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ **Sujeto a:** $y(x_0) = y_0$ Para este PVI se busca una solución de la ED en el intervalo I, que contenga a x_0, es decir que su gráfica pase por el punto de coordenadas (x_0, y_0).	
PVI de segundo orden **Resolver:** $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$ **Sujeto a:** $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ Para este PVI se busca una solución de la ED en el intervalo I, que contenga a x_0, es decir que su gráfica pase por el punto de coordenadas (x_0, y_0) y además la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1.	

Ejemplo 18:

Resolver: $\frac{dy}{dx} = y$
Sujeto a: $y(0) = 3$

La solución general de la ED dada es: $y = ce^x$ (Verifíquelo).

Para determinar la solución particular dada la condición $y(0) = 3$, se sustituye en la solución general $x = 0,\ y = 3$. Esto es:

$$\begin{aligned} y &= ce^x \\ 3 &= ce^0 \\ 3 &= c \end{aligned}$$

Por lo que $y = 3e^x$ es una solución del PVI dado.

Ejemplo 19:

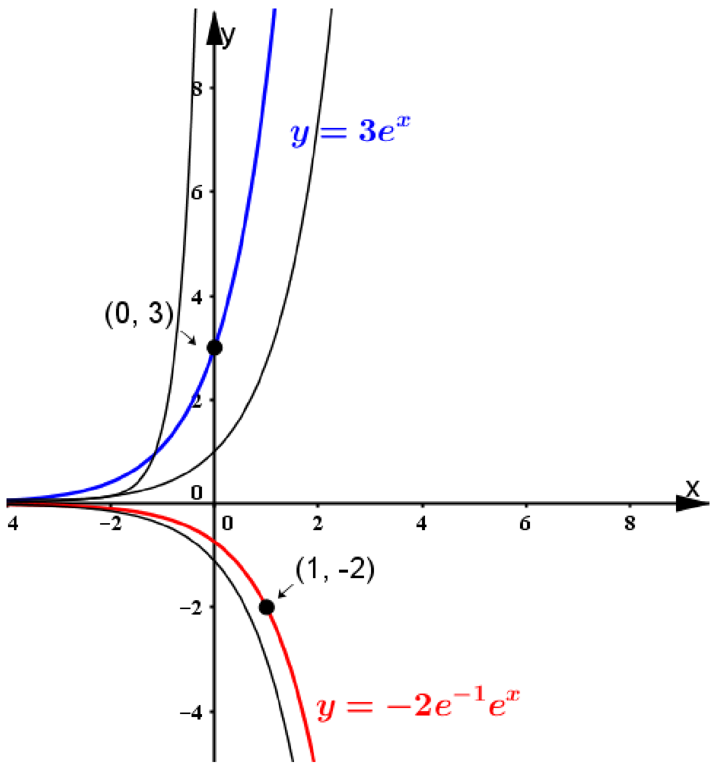
Resolver: $\frac{dy}{dx} = y$
Sujeto a: $y(1) = -2$

Para determinar la solución particular dada la condición $y(1) = -2$, se sustituye en la solución general $x = 1,\ y = -2$. Esto es:

$$\begin{aligned} y &= ce^{x} \\ -2 &= ce^{1} \\ -2e^{-1} &= c \end{aligned}$$

Por lo que $y = -2e^{-1}e^{x}$ es una solución del PVI dado.

A continuación, se hace la representación gráfica de los Ejemplos 18 y 19.



Ejemplo 20:

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = \frac{1}{x^2+c}$. Si se establece la condición inicial $y(0) = -1$, entonces se obtiene $c = -1$. De esta manera, una solución particular a la ED dada es: $y = \frac{1}{x^2-1}$. (Verifíquelo).

Se enfatizan las siguientes tres diferencias:

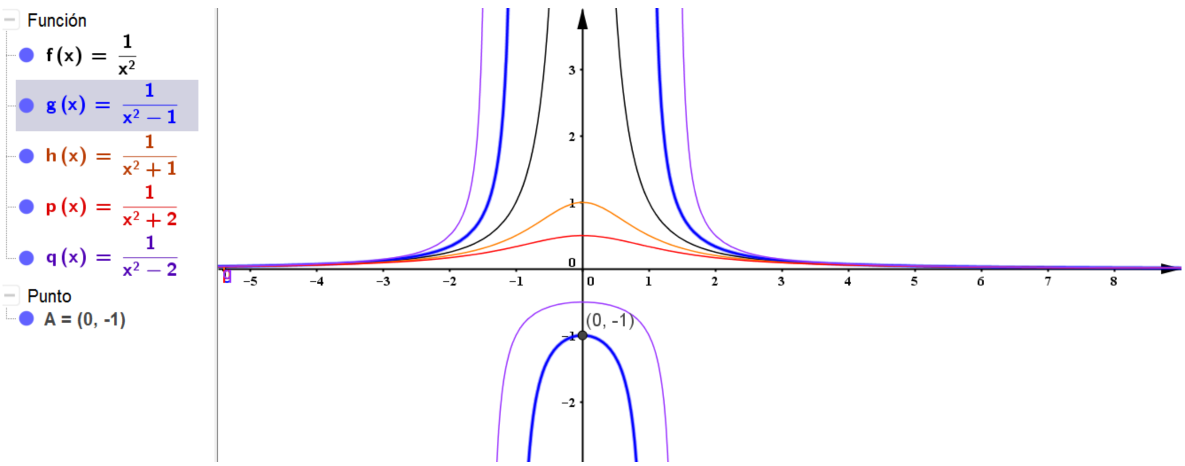
- Considerada como una ***función***, el dominio de $y = \frac{1}{x^2-1}$ es el conjunto de todos los números reales "x" para los cuales "y" está definida, esto es: $\mathbb{R} - \{-1,1\}$.

- Considerada como una ***solución*** de la ED, el intervalo I de definición de $y = \frac{1}{x^2-1}$ podría tomarse como cualquier intervalo en el cual "y" está definida y es derivable, esto es $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$ y $(1, \infty)$.

- Considerada como una solución del P.V.I:

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

El intervalo más grande en el cual "y" está definida, es derivable y contiene al punto $x = 0$ es: $(-1,1)$.

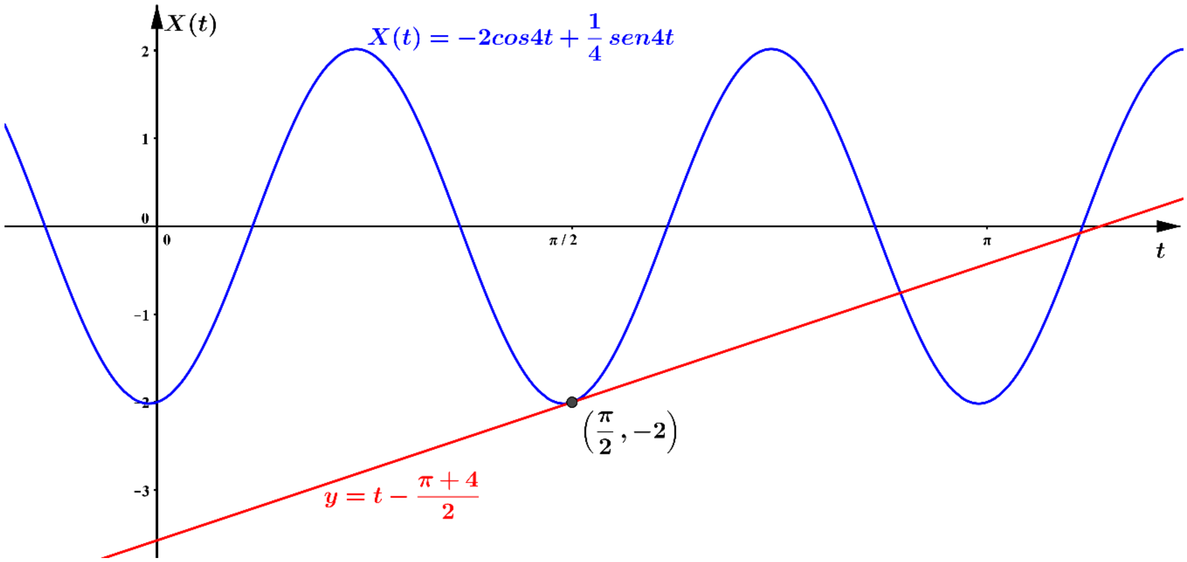


Ejercicio 5:

$x = c_1 cos4t + c_2 sen4t$ es *una* familia de soluciones de dos parámetros de $x'' + 16x = 0$.

Determine una solución del problema con valores iniciales:

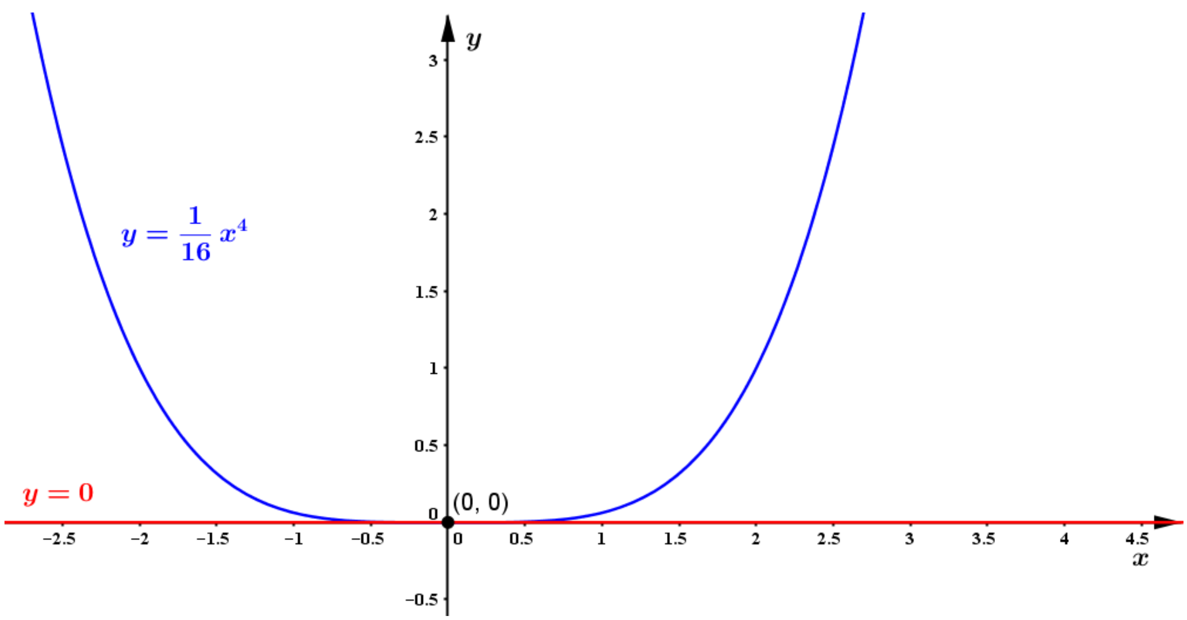
$$\begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$



Observación: El artículo indefinido *una* se usa para sugerir la posibilidad de que pueden existir otras soluciones.

Ejemplo 21: Cada una de las funciones $y = 0$, $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface el PV.I. Ver figura.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



Teorema: Existencia de una solución única.

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b,$ c$\leq y \leq d$ que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior. Si $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ contenido en $[a, b]$ y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del P.V.I.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo 22: La ED $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ tiene al menos dos soluciones $\left(y = 0\ e\ y = \frac{1}{16}x^4\right)$ cuyas gráficas pasan por el punto (0,0).

Analizando las funciones:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x\sqrt{y}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Son continuas cuando $y > 0$.

Por tanto, el Teorema permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), con $y_0 > 0$, en la mitad superior del plano existe algún intervalo centrado en x_0 en el cual la ED dada tiene una solución única.

Ejemplo 23: Dados los PVI vistos previamente:

ED Y CONDICIÓN	**SOLUCIÓN**	**TEOREMA**
$y' = y$ $y(0) = 3$	$y = 3e^x$	$\frac{dy}{dx} = y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$
$y' = y$ $y(1) = -2$	$y = -2e^{x-1}$	$\frac{dy}{dx} = y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$

El teorema garantiza que no hay otras soluciones de los PVI dados distintos a $y = 3e^x$ e $y = -2e^{x-1}$. Dado que $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(-\infty, \infty)$.